الوحدة الأولى : المصفوفات

- **المصفوفة** : هى ترتيب لعدد من العناصر فى صفوف أفقية وأعمدة رأسية بين قوسين
- المصفوفة التى عدد صفوفها م وعدد أعمدتها ν تكون على النظم م × ν
- نرمز للعنصر داخل المجموعة بالرمز أ$_{\text{ص ع}}$ (تقرأ ألف صاد عين) حيث : ص = رقم الصف ، ع = رقم العمود

مثال (١)

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ، ج = (٢ ١- ٦)

① اكتب نظم كل من المصفوفات أ ، ب ، ج

② اكتب العناصر الآتية : أ$_{٢١}$ ، ب$_{١٣}$ ، ج$_{١١}$ ، أ$_{٢٢}$ ، ب$_{١٢}$ ، ج$_{٣١}$

الحل

① أ على النظم ٢ × ٢ ، ب على النظم ٣ × ٢ ، ج على النظم ١ × ٣

② أ$_{٢١}$ = ٨ ، ب$_{٢٣}$ = ١ ، ج$_{١١}$ = ٢ ، أ$_{٢٢}$ = ٥ ، ب$_{١٢}$ = –٣ ، ج$_{٣١}$ = ٦

تدريب :

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ، ج = (٠ ١ ٦-)

① أ على النظم ...... ، ب على النظم ...... ، ج على النظم ......

② أ$_{٢١}$ = ... ، ب$_{٢٣}$ = ... ، ج$_{١١}$ = ... ، أ$_{٢٢}$ = ... ، ب$_{١٢}$ = ... ، ج$_{٣١}$ = ...

مثال (٢)

اكتب المصفوفة (أ$_{\text{ص ع}}$) على النظم ٢ × ٣ ، أ$_{\text{ص ع}}$ = ص + ٢ ع

الحل

أ$_{١١}$ = ١ + ٢ × ١ = ٣ ، أ$_{٢١}$ = ١ + ٢ × ٢ = ٥

، أ$_{٣١}$ = ١ + ٢ × ٣ = ٧ ، أ$_{١٢}$ = ٢ + ٢ × ١ = ٤

، أ$_{٢٢}$ = ٢ + ٢ × ٢ = ٦ ، أ$_{٣٢}$ = ٢ + ٢ × ٣ = ٨

∴ (أ$_{\text{ص ع}}$) = $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

تدريب (١)

اكتب المصفوفة (أ$_{\text{ص ع}}$) على النظم ٣ × ٢ بحيث أ$_{\text{ص ع}}$ = ص – ع

الحل

أ$_{١١}$ = ١ – ١ = ٠ ، أ$_{٢١}$ = ... ، أ$_{١٢}$ = ...

، أ$_{٢٢}$ = ... ، أ$_{١٣}$ = ... ، أ$_{٢٣}$ = ...

∴ أ = $\begin{pmatrix} ..... & ..... \\ ..... & ..... \\ ..... & ..... \end{pmatrix}$

تدريب (٢)

أكمل ما يأتى :

عناصر المصفوفة أ$_{\text{ص ع}}$ حيث ص = ١ ، ع = ١ ، ٢ ، ٣ هى :

أ = (...... ....) وهى مصفوفة على النظم ...... × ......

● بعض المصفوفات الخاصة

(١) مصفوفة الصف :

هى المصفوفة التى تحتوى على صف واحد فقط

مثلاً : أ = (٢ ٠ ١-) مصفوفة صف على النظم ١ × ٣

(٢) مصفوفة العمود :

هى المصفوفة التى تحتوى على عمود واحد فقط

مثلاً : أ = $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ مصفوفة عمود على النظم ٢ × ١

(٣) المصفوفة المربعة :

هى المصفوفة التى فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة

مثلاً : أ = $\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظم ٢ × ٢

(٤) المصفوفة الصفرية :

هى المصفوفة التى جميع عناصرها أصفار ونرمز لها بالرمز ▭

مثلاً : ▭$_{٢ \times ٢}$ = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ، ▭$_{١ \times ٣}$ = (٠ ٠ ٠)

(٥) المصفوفة القطرية :

هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها اصفار ماعدا القطر الرئيسى يكون أحد عناصره على الأقل لا يساوى الصفر

مثلاً : أ = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(٦) مصفوفة الوحدة :

هى مصفوفة قطرية كل عناصر قطرها الرئيسى تساوى الواحد الصحيح ونرمز لها بالرمز I .

مثلاً : $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix} = I$

تدريب

أكتب نوع ونظم كل مصفوفة مما يلى أسفلها :

(١) $\begin{pmatrix} ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ (٢) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ (٣) $\begin{pmatrix} -١ \\ -٧ \end{pmatrix}$

الحل

النوع ....

النظم ....

(٤) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$ (٥) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ (٦) $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ \end{pmatrix}$

النوع ....

النظم ....

(٧) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ (٨) $\begin{pmatrix} ٠ \\ ٠ \end{pmatrix}$

النوع ....

النظم ....

• تساوى مصفوفتين

تتساوى المصفوفتين أ ، ب إذا كانا :

(١) لهما نفس النظم (٢) كل عنصر فى أ يساوى نظيره فى ب

مثال (٣)

إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ ٤ & ٦ & ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & س & ٧ \\ ص & ٦ & ٨ \end{pmatrix}$

أوجد قيمة : س ص + ع

الحل

من التساوى نجد أن : س = ٥ ، ص = ٤ ، ع = ٨

∴ س ص + ع = ٥ × ٤ + ٨ = ٢٨

تدريب

إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣ & س & ٧ \\ ع & -٦ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٧ \\ ٤ & ص & ٨ \end{pmatrix}$

أوجد قيم : س ، ص ، ع

الحل : س = ... ، ص = ... ، ع = ...

مثال (٤)

إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & جـ + ء \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & جـ - ء \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ فأوجد قيم : جـ ، ء

الحل

جـ + ء = ١ .... (١) ، جـ – ء = ٥ .... (٢)

بجمع (١) + (٢) ⇐ ٢ جـ = ٦ ومنها جـ = ٣

بالتعويض فى (١) :

⇐ ٣ + ء = ١ ⇐ ء = ١ – ٣ ⇐ ء = –٢

تدريب

إذا كانت : $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & جـ + ء \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & جـ - ١ \\ ٢ & ١٣ \end{pmatrix}$ فأوجد قيم : جـ ، ء

الحل

جـ – ١ = ... ⇐ جـ = ... + ... = ...

، جـ + ء = ... ⇐ ...... + ء = ١٣ ⇐ ء = ١٣ – ...... = ...

ملحوظة :

يمكن ضرب جميع عناصر مصفوفة × عدد حقيقى ، كذلك يمكن قسمة جميع عناصر المصفوفة على عدد حقيقى

مثال (٥)

إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٨ \\ -٤ & ٦ \end{pmatrix}$ فأوجد : ٣أ ، –أ ، $-\frac{١}{٢}$ أ

الحل

$٣أ = \begin{pmatrix} ٦ & ٢٤ \\ -١٢ & ١٨ \end{pmatrix}$ ، $-أ = \begin{pmatrix} -٢ & ٨ \\ ٤ & -٦ \end{pmatrix}$

، $-\frac{١}{٢} أ = \begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix}$

تدريب

إذا كانت $س = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ فأوجد : ٢ س ، –س ، $-\frac{١}{٣}$ س

الحل

$٢ س = \begin{pmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{pmatrix}$ ، $-س = \begin{pmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{pmatrix}$ ، $-\frac{١}{٣} س = \begin{pmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{pmatrix}$

• مدور المصفوفة

مدور المصفوفة أ نرمز له بالرمز $أ^{مد}$ وهو نفس المصفوفة أ بعد استبدال الصفوف بالأعمدة بنفس ترتيبها

مثلاً : إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٧ \\ ٢ & -٦ & ٨ \end{pmatrix}$ على النظم ٢ × ٣

فإن $أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & -٦ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}$ على النظم ٣ × ٢

مثال (٦)

إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ١ & س \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ -١ & ص + ١ \end{pmatrix}$ وكانت $أ = ب^{مد}$

فأوجد : س ، ص ثم قيمة المقدار : (٣ س + ٢ ص)

الحل

ا = $\begin{pmatrix} \text{س} & ١ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ \text{ص}+١ & ٠ \end{pmatrix}$

∵ ا = ب^مد ∴ س = -١ ، ص + ١ = ٣ ⟸ ص = ٢

∴ ٣ س + ٢ ص = ٣ (-١) + ٢ (٢) = ١

تدريب

إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ٧ & \text{ا}+٢ & ٣ \\ ٨ & -٦ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -٦ & ١ \\ \text{ب} & ٧ \end{pmatrix}$ وكانت

س = ص^مد فأوجد قيمة كل من ا ، ب ثم أوجد قيمة (٤ا + ب)

الحل

س = $\begin{pmatrix} ٧ & \text{ا}+٢ & ٣ \\ ٨ & -٦ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ص^مد = $\begin{pmatrix} ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{pmatrix}$

∵ س = ص^مد ∴ ا + ٢ = ١ ⟸ ا = ... ، ب = ...

∴ ٤ا + ب = ٤ (......) + (......) = ...

• المصفوفات المتماثلة وشبة المتماثلة

إذا كانت ا مصفوفة مربعة فإن :

✪ ا مصفوفة متماثلة ⟺ ا = ا^مد

✪ ا مصفوفة شبة متماثلة ⟺ ا = -ا^مد

مثلاً : المصفوفة ا = $\begin{pmatrix} ٠ & -٢ & ٥ \\ ٧ & ٩ & -٢ \\ ١ & ٧ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة لأن

ا = ا^مد (لاحظ تماثل العناصر المصفوفة حول القطر الرئيسى)

، المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٠ \\ ٧ & ٠ & ٢ \\ ٠ & -٧ & -٣ \end{pmatrix}$ مصفوفة شبة متماثلة لأن

ب = – ب^مد (لاحظ عناصر القطر الرئيسى كلها أصفار وبقية عناصر المصفوفة متساوية عددياً ومختلفة فى الاشارة حول القطر الرئيسى)

سؤال : المصفوفة القطرية متماثلة أم غير متماثلة ؟

الاجابة : المصفوفة القطرية هى مصفوفة ....

مثال (٧)

إذا كانت ا = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢\text{س} & ٥ \\ ٢\text{س}+\text{ص} & ٩ & -٢ \\ ١ & ٧ & ٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة فأوجد قيمة كل من س ، ص

الحل

∵ ا مصفوفة متماثلة ∴ ٢ س = -٢ ⟸ س = -١

، ٢ س + ص = ٧ ⟸ -٢ + ص = ٧ ⟸ ص = ٧ + ٢ = ٩

تدريب

إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ٠ & ٦ & ٥ \\ ٧ & ٩ & -٣\text{ا} \\ ١ & ٧ & \text{ا}+\text{ب} \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة فأوجد قيمة كل من ا ، ب

الحل

∵ س مصفوفة متماثلة ∴ -٣ا = ... ⟸ ا = ...

، ا + ب = ... ⟸ ...... + ب = ... ⟸ ب = ...

مثال (٨)

إذا كانت ا = $\begin{pmatrix} -١ & ٢\text{س} & ٠ \\ ٢\text{س}+\text{ص} & ٠ & -٦ \\ ٠ & ٥ & ١ \end{pmatrix}$ مصفوفة شبة متماثلة فأوجد قيمة كل من س ، ص

الحل

∵ ا مصفوفة شبة متماثلة ∴ ٢ س = ٦ ⟸ س = ٣

، ٢ س + ص = -٥ ⟸ ٢(٣) + ص = -٥ ⟸ ص = -١١

تدريب

إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ٨ & ٦ & ٠ \\ -٧ & ٠ & -٣\text{ا} \\ ٠ & ٧ & \text{ا}+٢\text{ب} \end{pmatrix}$ مصفوفة شبة متماثلة فأوجد قيمة كل من ا ، ب

الحل

∵ س مصفوفة شبة متماثلة ∴ ٣ا = ... ⟸ ا = ...

، ا + ٢ب = ... ⟸ ...... + ٢ب = ... ⟸ ٢ب = ... ⟸ ب = ...

تمارين (١)

(١) إذا كانت (٢ س　س + ص　ع – ص) = (-٨　-٥　٩) فأوجد قيمة كل من : س ، ص ، ع

(٢) إذا كانت ا = $\begin{pmatrix} ٢٤ & ٦ \\ ١٨ & -١٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢٤ & \text{س} \\ \text{ص} & -١٢ \end{pmatrix}$ وكان ا = ب فأوجد قيمة كل من س ، ص ثم أوجد قيمة ٣ س – ص

(٣) إذا كانت ٢ا = $\begin{pmatrix} ٢٤ & ٦ \\ ١٨ & -١٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٨ & \text{س} \\ \text{ص} & -٤ \end{pmatrix}$ وكان ا = ب فأوجد قيمة كل من س ، ص ثم أوجد قيمة ٣ س + ص

(٤) إذا كانت ا = $\begin{pmatrix} \text{ص}-١ & ١ \\ -٣ & -٦ \end{pmatrix}$ مصفوفة متماثلة فإن ص = ...

(٥) إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & ص-١ \\ -٦ & -٣ \end{pmatrix}$ مصفوفة شبه متماثلة فإن ص = ...

(٦) إذا كانت س = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & -٦ \\ ب & ٨ \end{pmatrix}$ ، ص = $\begin{pmatrix} ٣ & أ+ب & ٧ \\ ٢ & -٦ & ٨ \end{pmatrix}$

وكانت $س = ص^{مد}$ فأوجد قيمة كل من أ ، ب ثم أوجد قيمة (٤أ + ب)

(٧) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٣ ، وكان $أ_{ص ع}$ = ٢ ص + ع أكتب المصفوفة أ .

٢ ـ جمع وطرح المصفوفات

• **شرط جمع مصفوفتين**

أن يكون لهما نفس النظم ويتم جمع كل عنصر من المصفوفة الأولى مع نظيره من المصفوفة الثانية

مثال (١)

إذا كانت أ = (١ −٢ ٣) ، ب = (٥ ٤ −٣) فأوجد أ + ب

الحل

أ + ب = (١ −٢ ٣) + (٥ ٤ −٣) = (٦ ٢ ٠)

تدريب

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٦ & ٨ \\ ٠ & -٧ \\ ٧ & ٠ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٦ & ١ \\ -٣ & -٧ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ فأوجد أ + ب

الحل

أ + ب = $\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

مثال (٢)

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} -٦ & ١ \\ -٣ & -٧ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ ٤ & ٦ & ٨ \end{pmatrix}$

فأوجد $أ + ب^{مد}$

الحل

$أ + ب^{مد} = \begin{pmatrix} -٦ & ١ \\ -٣ & -٧ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٥ \\ ٢ & -١ \\ ١٢ & ١٢ \end{pmatrix}$

تدريب

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٧ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ فأوجد $٢أ + ب^{مد}$

الحل

$٢أ + ب^{مد} = ٢ \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}^{مد}$

$= \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

مثال (٣) :

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٧ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ فحقق أن :

$(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$

الحل

$أ + ب = \begin{pmatrix} ٧ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٠ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix}$

$(أ + ب)^{مد} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ .... (١)

$أ^{مد} + ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٧ & ٢ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : $(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$

تدريب

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$ فحقق أن :

$(أ + ب)^{مد} = أ^{مد} + ب^{مد}$

الحل

$أ + ب = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

$(أ + ب)^{مد} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ .... (١)

$أ^{مد} + ب^{مد} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : .... = ... + ...

مثال (٤)

أوجد قيم أ ، ب ، جـ التى تحقق المعادلة الآتية :

$٣ \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & -٢ \end{pmatrix} = ٢ \begin{pmatrix} أ+١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٤+ب \\ جـ+٣ & -١٠ \end{pmatrix}$

الحل

$\begin{pmatrix} ٣أ & ٣ب \\ ٣جـ & -٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢أ+٢ & ٦ \\ -٢ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٤+ب \\ جـ+٣ & -١٠ \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} ٣\text{أ} & ٣\text{ب} \\ ٣\text{جـ} & -٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢\text{أ}+٤ & ١٠+\text{ب} \\ \text{جـ}+١ & -٦ \end{pmatrix}$ ومن تساوى المصفوفتين

٣أ = ٢أ + ٤ ⟸ ٣أ − ٢أ = ٤ ⟸ أ = ٤

، ٣ب = ١٠ + ب ⟸ ٣ب − ب = ١٠ ⟸ ٢ب = ١٠ ⟸ ب = ٥

، ٣جـ = جـ + ١ ⟸ ٣جـ − جـ = ١ ⟸ ٢جـ = ١ ⟸ جـ = $\frac{١}{٢}$

تدريب

أوجد قيم أ ، ب ، جـ التى تحقق المعادلة الآتية :

$$٣\begin{pmatrix} \text{أ} & \text{ب} \\ \text{جـ} & ٢ \end{pmatrix} = ٢\begin{pmatrix} \text{أ} & ٦ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٤+\text{ب} \\ \text{جـ}+٣ & ٠ \end{pmatrix}$$

الحل

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$ ومن تساوى المصفوفتين :

....

....

....

....

• بعض خواص عملية الجمع :

(١) خاصية الابدال : أ + ب = ب + أ

(٢) خاصية وجود المحايد الجمعى :

المصفوفة الصفرية ▭ هى المحايد الجمعى

(٣) خاصية المعكوس الجمعى : (−أ) هو المعكوس الجمعى

للمصفوفة (أ) بحيث : أ + (−أ) = (−أ) + أ = ▭

مثلاً : إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ ٥ & ٦ \\ -٧ & -٨ \end{pmatrix}$ فإن المعكوس الجمعى لها

هو $-\text{أ} = \begin{pmatrix} -٣ & ٤ \\ -٥ & -٦ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}$

• شرط طرح مصفوفتين

أن يكون لهما نفس النظم . ويتم طرح كل عنصر من المصفوفة الثانية من نظيره من المصفوفة الأولى

مثال (٥)

إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٧ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$

أوجد : أ − ب ، ب − أ ماذا تستنتج ؟

الحل

$\text{أ} - \text{ب} = \begin{pmatrix} ٧ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ .... (١)

$\text{ب} - \text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٧ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٤ & ٢ \\ -١ & -١ \end{pmatrix}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن : أ − ب ≠ ب − أ عملية الطرح ليست إبدالية

مثال (٦)

إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٧ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ع} = \begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$

فأوجد ٢أ + ٣ب − ٤ع

الحل

المقدار $= ٢\begin{pmatrix} ٧ & -١ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix} + ٣\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} - ٤\begin{pmatrix} -٣ & ٢ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١٤ & -٢ \\ ٤ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٩ & ٣ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١٢ & -٨ \\ ٠ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٥ & -٧ \\ ٧ & ٢٠ \end{pmatrix}$

تدريب

إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & -٤ & ١ \\ ٥ & ٦ & -١ \\ -٧ & -٨ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -١ & ٤ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ٠ & -٥ & ٣ \end{pmatrix}$

فأوجد أ − ٢ب

الحل

$\text{أ} - ٢\text{ب} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

مثال (٧)

إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} ١ & -٤ & ٥ \\ ٧ & ٦ & -٢ \\ -٦ & -٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} -١ & ٤ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ٠ & -٥ & ٣ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س بحيث : ٣س + ٢ب = أ

الحل

∵ ٣س + ٢ب = أ ⟸ ٣س = أ − ٢ب

$\therefore ٣\text{س} = \begin{pmatrix} ١ & -٤ & ٥ \\ ٧ & ٦ & -٢ \\ -٦ & -٤ & ٣ \end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix} -١ & ٤ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٢ \\ ٠ & -٥ & ٣ \end{pmatrix}$

∴ ٣ س =
$$\begin{pmatrix}1 & -4 & 5\\ 7 & 6 & -2\\ -6 & -4 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & -8 & -8\\ -4 & -6 & -4\\ 0 & 10 & -6\end{pmatrix}$$

∴ ٣ س =
$$\begin{pmatrix}3 & -12 & -3\\ 3 & 0 & -6\\ -6 & 6 & -3\end{pmatrix}$$
وبالقسمة على ٣ للطرفين

∴ س =
$$\begin{pmatrix}1 & -4 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

مثال (٨)

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 5\\ 3 & -3\end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix}0 & 4\\ -2 & -6\\ 8 & -2\end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س بحيث : س^مد + ٢ ب = ٤ أ + $\frac{1}{2}$ ج

الحل

س^مد = ٤ أ + $\frac{1}{2}$ ج − ٢ ب

$$= 4\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 4\\ -2 & -6\\ 8 & -2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 5\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}8 & 4\\ -4 & 12\\ 0 & 16\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -3\\ 4 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4 & 4\\ 2 & -10\\ -6 & 6\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4 & 10\\ -3 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}$$
⇐ س =
$$\begin{pmatrix}4 & -3 & -2\\ 10 & -1 & 9\end{pmatrix}$$

تدريب

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix}0 & 9\\ -3 & 3\\ 6 & -6\end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س بحيث : س^مد + ٣ ب = ٣ أ + $\frac{1}{3}$ ج

الحل

س^مد = ٣ أ + $\frac{1}{3}$ ج − ٣ ب

$$= 3\begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

⇐ س =
$$\begin{pmatrix}\cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

مثال (٩)

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix}7 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س التي تحقق العلاقة : ٣ أ − ٢ ب = ٢ س − ٣ I حيث I على النظم ٢ × ٢

الحل

٢ س = ٣ أ − ٢ ب + ٣ I

$$= 3\begin{pmatrix}7 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

∴ ٢ س =
$$\begin{pmatrix}21 & -3\\ 6 & 9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6 & -4\\ 0 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

∴ ٢ س =
$$\begin{pmatrix}30 & -7\\ 6 & 16\end{pmatrix}$$
⇐ س =
$$\begin{pmatrix}15 & -3.5\\ 3 & 8\end{pmatrix}$$

تدريب

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س التي تحقق العلاقة : ٣ س + ٢ ب = ٢ أ + ٣ I حيث I على النظم ٢ × ٢

الحل

٣ س = ...

$$= 2\begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

⇐ س =
$$\begin{pmatrix}\cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots\end{pmatrix}$$

مثال (١٠)

إذا كانت : ٣ أ^مد − س = ٢ ب − ٣ س^مد حيث

أ = $\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix}5 & 0\\ -3 & -2\end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س

الحل

٣ س^مد − س = ٢ ب − ٣ أ^مد

نفرض أن س = $\begin{pmatrix}ل & م\\ ن & و\end{pmatrix}$ ∴ س^مد = $\begin{pmatrix}ل & ن\\ م & و\end{pmatrix}$

$$\therefore ٣\begin{pmatrix} ل & ن \\ م & و \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ل & م \\ ن & و \end{pmatrix} = ٢\begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix} - ٣\begin{pmatrix} ٤ & -٢ \\ -٣ & -١ \end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow \begin{pmatrix} ٢ل & ٣ن-م \\ ٣م-ن & ٢و \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ٦ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$$

ومن تساوى مصفوفتين

$\therefore$ ٢ل = −٢ ⇐ ل = −١ ، ٢و = −١ ⇐ و = $-\frac{١}{٢}$

، ٣ن − م = ٦ .... (١) ، ٣م − ن = ٣ .... (٢)

بضرب المعادلة (١) × ٣ وجمعها مع المعادلة (٢) :

⇐ ٨ن = ٢١ ⇐ ن = $٢\frac{٥}{٨}$ وبالتعويض فى (٢)

⇐ ٣م = ٣ + $٢\frac{٥}{٨}$ = $٥\frac{٥}{٨}$ ⇐ م = $١\frac{٧}{٨}$

$$\therefore س = \begin{pmatrix} -١ & ١\frac{٧}{٨} \\ ٢\frac{٥}{٨} & -\frac{١}{٢} \end{pmatrix}$$

تمارين (٢)

أوجد قيم س ، ص ، ع ، م ، ب إن وجدت فى كل مما يأتى :

(١) $\begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٢ & -٣ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} س & ص \\ ع & م \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

(٢) $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & -١ \\ ٤ & ٧ & ٥ \\ ٠ & -٦ & ٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٤ & -٦ & -٧ \\ -١ & ٣ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س & ٥ & م \\ ٨ & ب & -٢ \\ ع & -٣ & ص \end{pmatrix}$

(٣) $٣\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ س & ٢ \end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix} ٢ & ص \\ -٥ & م \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٧ & ٦ \\ ٨ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ع & -٥ \\ -٤ & ٢ \end{pmatrix}$

(٤) إذا كانت م = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -٣ & ٥ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -١ & ١ \\ ٦ & -٢ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س التى تحقق : ٢م − س = $ب^{مد}$

٣ ـ ضرب المصفوفات

- شرط وجود م ب أن تكون :

م مصفوفة على النظم م × ل ، ب مصفوفة على النظم ل × ن

أى عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية

وتكون المصفوفة م ب الناتجة من عملية الضرب على النظم م × ن

ونلاحظ أن كل عنصر فى المصفوفة م ب يساوى مجموع حواصل ضرب عناصر الصف ص من م فى عناصر العمود ع من ب

مثال توضيحي

إذا كانت م = $\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ -١ & ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ أوجد م ب

الحل

م على النظم ٢ × ٢ ، ب على النظم ٢ × ٣

⇐ م ب على النظم ٢ × ٣

$$م ب = \begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ -١ & ٢ & -٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٥\times١-٢\times-١ & ٥\times٥-٢\times٢ & ٥\times٣-٢\times-٤ \\ ٣\times١-١\times-١ & ٣\times٥-١\times٢ & ٣\times٣-١\times-٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٧ & ٢١ & ٢٣ \\ ٤ & ١٣ & ١٣ \end{pmatrix}$$

مثال (٢)

إذا كانت م = $\begin{pmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ -١ & ٢ & -٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ ٥ & ٦ \\ -٧ & -٨ \end{pmatrix}$ أوجد م ب

الحل

م على النظم ٢ × ٣ ، ب على النظم ٣ × ٢ ⇐ م ب على النظم ٢ × ٢

$$م ب = \begin{pmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ -١ & ٢ & -٤ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ ٥ & ٦ \\ -٧ & -٨ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١\times٣+٥\times٥+٣\times-٧ & ١\times-٤+٥\times٦+٣\times-٨ \\ -١\times٣+٢\times٥-٤\times-٧ & -١\times-٤+٢\times٦-٤\times-٨ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٧ & ٢ \\ ٣٥ & ٤٨ \end{pmatrix}$$

تدريب

إذا كانت م = $\begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

أوجد م ب ، ب م . هل م ب = ب م ؟

الحل

م ب = $\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ .... (١)

ب م = $\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن م ب ...... ب م

نستنتج أن عملية ضرب المصفوفات ليست إبدالية

• استخدام الآلة فى العمليات على المصفوفات

أولاً : ادخال المصفوفة م = $\begin{pmatrix} ١ & ٥ & ٣ \\ -١ & ٢ & -٤ \end{pmatrix}$

(١) أضغط مفتاح MODE تظهر لك شاشة بها عدة أنظمة نختار منها نظام المصفوفات MATRIX وهو رقم ٦

(٢) بعد الضغط على رقم ٦ تظهر لك شاشة تحديد اسم المصفوفة

١ ، ٢ ، ٣ الضغط على ١ يعنى اختيار المصفوفة A ،
الضغط على ٢ يعنى اختيار المصفوفة B ،
الضغط على ٣ يعنى اختيار المصفوفة C

(٣) بعد الضغط على رقم ١ تظهر شاشة اختيار نظم المصفوفة وهو هنا ٢ × ٣ أى رقم ٤

(٤) بعد الضغط على الرقم ٤ تظهر شاشة ادخال عناصر المصفوفة ونستخدم علامة = لادخال العنصر ونبدأ بعناصر الصف الأول ثم الثانى وهكذا كما هو مبين من اليسار لليمين

1=5=3=

ثم ندخل عناصر الصف الثانى : (–)1=2=(–)4=

ثانياً : إدخال المصفوفة ب = $\begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ ٥ & ٦ \\ -٧ & -٨ \end{pmatrix}$

(٥) نضغط SHIFT 4 ثم 2

(٦) بعد الضغط على مفتاح ٢ (داتا) تظهر شاشة اختيار المصفوفة

(٧) بعد اختيار المصفوفة B تظهر شاشة اختيار النظم

(٨) بعد اختيار النظم ندخل عناصر الصف الأول والثانى ونضغط AC للدلالة على انتهاء عملية الادخال

✪ لإيجاد أ ب نضغط المفاتيح التالية بالتتابع من اليسار لليمين :

(١) SHIFT 4 3 ← فيظهر على الشاشة : MAT A

(٢) نضغط علامة ×

(٣) SHIFT 4 4 ← فيظهر على الشاشة : MAT B

(٤) نضغط علامة = فيظهر على الشاشة المصفوفة ناتج الضرب .

✪ لإيجاد أ + ب نضغط المفاتيح التالية بالتتابع من اليسار لليمين :

نجرى نفس الخطوات السابقة ولكن نضع علامة + بدلاً من علامة × فى الخطوة رقم ٢ .

✪ لإيجاد أ$^{\text{مد}}$ نضغط المفاتيح التالية بالتتابع من اليسار لليمين :

(١) SHIFT 4 8 ← فيظهر على الشاشة : Trn (

(٢) SHIFT 4 3 وذلك لاختيار المصفوفة A ثم نغلق القوس فيظهر على الشاشة : Trn (MAT A)

(٣) نضغط علامة = لتظهر على الشاشة المصفوفة أ$^{\text{مد}}$

✪ لإيجاد أ$^{\text{مد}}$ + ب نضغط المفاتيح التالية بالتتابع من اليسار لليمين :

نضغط المفاتيح المبينة التالية بالتتابع من اليسار لليمين :

SHIFT 4 8 SHIFT 4 3) + SHIFT 4 4 =

أو نضغط : SHIFT 4 8 SHIFT 4 3) × SHIFT 4 4 =

وذلك لإيجاد أ$^{\text{مد}}$ × ب

خواص عملية ضرب المصفوفات

(١) خاصية الدمج : (أ ب) ج = أ (ب ج)

(٢) خاصية وجود المحايد الضربى (I) : أ I = I أ = أ

(٣) خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها :
أ (ب + ج) = أ ب + أ ج ، (أ + ب) ج = أ ج + ب ج

(٤) مدور حاصل ضرب مصفوفتين = مدور الثانية × مدور الأولى
أى أن : (أ ب)$^{\text{مد}}$ = ب$^{\text{مد}}$ أ$^{\text{مد}}$

مثال (٣)

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ -١ \end{pmatrix}$

أثبت أن : (أ ب) ج = أ (ب ج)

الحل

أ ب = $\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & -٤ & ٧ \\ ٤ & -٢ & ٥ \end{pmatrix}$

∴ (أ ب) ج = $\begin{pmatrix} ٧ & -٤ & ٧ \\ ٤ & -٢ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٨ \\ -٥ \end{pmatrix}$ .... (١)

، ب ج = $\begin{pmatrix} ١ & ٠ & ٣ \\ -١ & ٢ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ ٢ \\ -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ \\ -١ \end{pmatrix}$

أ (ب ج) = $\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٢ \\ -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٨ \\ -٥ \end{pmatrix}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ∴ الطرفان متساويان

مثال (٤)

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ ، ج = $\begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

أثبت أن : أ (ب + ج) = أ ب + أ ج

الحل

ب + ج = $\begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix}$

أ (ب + ج) = $\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & -٢ \\ ٧ & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٤ & -٢٠ \\ -١ & -١١ \end{pmatrix}$ ..(١)

أ ب + أ ج = $\begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٥ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & -٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -20 & -7 \\ -11 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & -13 \\ 10 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -20 \\ -1 & -11 \end{pmatrix}$ ...... (٢)

من (١) ، (٢) ⇐ الطرفان متساويان

تدريب

إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

أثبت أن : $(\text{أ ب})^{\text{مد}} = \text{ب}^{\text{مد}}\,\text{أ}^{\text{مد}}$

الحل

$\text{أ ب} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

$(\text{أ ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$ .... (١)

$\text{ب}^{\text{مد}}\,\text{أ}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$ .... (٢)

من (١) ، (٢) ⇐ ....

مثال (٥)

إذا كان $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ فأثبت أن : $\text{أ}^2 - 5\,\text{أ} + 2I = \square$

الحل

$\text{أ}^2 - 5\,\text{أ} + 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$+ 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -20 & 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ 20 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \square$

تدريب

إذا كان أ = فأثبت أن : $\text{أ}^2 - \text{أ} - 5I = \square$

الحل

$\text{أ}^2 - \text{أ} - 5I = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} -$

$5 \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} =$ ......

مثال (٦)

إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} \text{س} & 7 \\ 3 & \text{ص} \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 18 \end{pmatrix}$

وكان أ ب = ج فأوجد قيمة : س ، ص

الحل

$\text{أ ب} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{س} & 7 \\ 3 & \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\text{س} + 9 & 14 + 3\text{ص} \\ 4\text{س} + 15 & 28 + 5\text{ص} \end{pmatrix}$

$\because \begin{pmatrix} 2\text{س} + 9 & 14 + 3\text{ص} \\ 4\text{س} + 15 & 28 + 5\text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 18 \end{pmatrix}$ ⇐

$2\text{س} + 9 = 7$ ⇐ $2\text{س} = 7 - 9 = -2$ ⇐ $\text{س} = -1$

، $14 + 3\text{ص} = 8$ ⇐ $3\text{ص} = 8 - 14 = -6$ ⇐ $\text{ص} = -2$

مثال (٧)

إذا كانت $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & \text{س} \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \text{ص} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة : س ، ص

الحل

$\because \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 + \text{س ص} & 10 + 3\text{س} \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 7 + \text{س ص} & 11 + 3\text{س} \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore 11 + 3\text{س} = 5$ ⇐ $3\text{س} = 5 - 11$ ⇐ $3\text{س} = -6$

⇐ $\text{س} = -2$

، $7 + \text{س ص} = 7$ ⇐ $7 - 2\text{ص} = 7$ ⇐ $2\text{ص} = 7 - 7$

⇐ $\text{ص} = 0$

تدريب

إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} 5 & \text{س} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \text{ص} & 3 \end{pmatrix}$ ، $\text{ج} = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

وكان أ ب = ج فأوجد قيمة : س – ص

الحل

$\text{أ ب} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix}$

$\because \begin{pmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ ⇐

....

....

مثال (٨)

إذا كانت $\text{أ} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

، $\text{ج} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & -6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س التى تحقق العلاقة :

$5\,\text{س}^{\text{مد}} - (\text{ب ج})^{\text{مد}} = -\frac{1}{3}\,\text{أ}^2$

الحل

$ب ج = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & -6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 20 \\ 15 & 24 \end{pmatrix}$

$(ب ج)^{مد} = \begin{pmatrix} 24 & 15 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$

$أ^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= -3I$ ، $-\frac{1}{3} أ^2 = -\frac{1}{3}(-3I) = I$

$\therefore 5 س^{مد} = -\frac{1}{3} أ^2 + (ب ج)^{مد} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 & 15 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 25 & 15 \\ 20 & 25 \end{pmatrix} \Leftarrow س^{مد} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Leftarrow س = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

تمارين (٣)

(١) أكمل ما يأتي :

(أ) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ، ب مصفوفة على النظم ٢ × ٣ فإن أ ب مصفوفة على النظم .... ، ب أ مصفوفة على النظم ....

(ب) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٢ × ٣ ، أ ب مصفوفة على النظم ٢ × ١ فإن ب مصفوفة على النظم ....

(ج) إذا كانت أ مصفوفة على النظم ٣ × ٢ ، $ب^{مد}$ مصفوفة على النظم ١ × ٢ فإن المصفوفة أ ب تكون على النظم ....

(د) عدد عناصر المصفوفة التي على النظم ٣ × ٢ يساوى ....

(٢) إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ فأوجد :

أ ب ، ب أ ، $أ^{مد}$ ب ، أ $ب^{مد}$ ، $(أ ب)^{مد}$ ، $أ^2$

(٣) إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -7 \\ 10 & -5 & 5 \\ -8 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

أثبت أن : أ ب = ١٠ I

(٤) إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ س & ص \end{pmatrix}$

فأوجد قيمة كل من س ، ص التي تجعل أ ب = ب أ

(٥) إذا كانت $أ = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ، $ج = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ فأوجد المصفوفة س التي تحقق العلاقة

$2 س = أ^2 + (ب ج)^{مد}$

٤ ـ المحددات

✪ أولاً : محدد الرتبة الثانية :

قيمة محدد الرتبة الثانية تساوى حاصل ضرب عنصرى القطر الرئيسى مطروحاً منه حاصل ضرب عنصرى القطر الآخر .

مثال (١)

أوجد قيمة كل من المحددات الآتية :

① $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ ③ $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$ ④ $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -8 & -4 \end{vmatrix}$

الحل

① $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 1 \times 1 = 6 - 1 = 5$

② $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \times 3 - 1 \times (-2) = 15 + 2 = 17$

③ $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - [-4 \times (-5)] = 6 - 20 = -14$

④ $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = 6 \times (-4) - (-8) \times 3 = -24 + 24 = 0$

تدريب

أوجد قيمة كل من المحددات الآتية

① $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$

الحل

① $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}$ = ... × ...... − ...... × ...... = ...

② $\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$ = ... × ...... − ...... × ...... = ...

مثال (٢)

حل المعادلة الآتية : $\begin{vmatrix} 2س & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -48$

الحل

$-8 س - 24 = -48 \Leftarrow -8 س = -48 + 24$

$\Leftarrow -8 س = -24 \Leftarrow س = 3$

مثال (٣)

أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية : $\begin{vmatrix} س & 3 \\ 2 & س - 4 \end{vmatrix} = -6$

الحل

س (س – ٤) – ٦ = – ٦ ⇐ س (س – ٤) = ٠

⇐ س = ٠ أو س = ٤ ∴ س ∈ { ٠ ، ٤ }

تدريب

أوجد قيمة س التى تحقق المعادلة : $\begin{vmatrix} ٢ & \text{٣س} \\ ١ & -٤ \end{vmatrix} = ٧$

الحل

– ٨ – .... = ٧ ⇐ .... = ٧ + ٨ = ١٥ ⇐ س = ...

تدريب

أوجد قيمة س التى تحقق المعادلة : $\begin{vmatrix} \text{س} + ٣ & ١ \\ -٤ & \text{س} - ٤ \end{vmatrix} = ٣١$

الحل

(س + ٣) (س – ٣) – (– ٤) = ٣١

.... = ٣١ ⇐ $\text{س}^٢$ = ٣١ + ...

$\text{س}^٢$ = ٣٦ ⇐ س = ± ...... ∴ س ∈ { .... ، .... }

✪ ثانياً : محدد الرتبة الثالثة :

نتعرف أولاً على

(١) المحدد الأصغر المصاحب (المناظر) للعنصر :

يمكن الحصول عليه بحذف الصف والعمود المتقاطعين على هذا العنصر

(٢) إشارة المحدد الأصغر :

تتحدد كما بالشكل المقابل : $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

✪ فك محدد الرتبة الثالثة :

يمكن فك محدد الرتبة الثالثة باستخدام عناصر أى صف أو أى عمود ومحدداتها الصغرى بإشاراتها .

مثال (٤)

أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ٣ & ٨ & ٢ \\ ١ & -١ & -٣ \end{vmatrix}$ باستخدام عناصر العمود الأول

الحل

قيمة المحدد = $٢ \begin{vmatrix} ٨ & ٢ \\ -١ & -٣ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ -١ & -٣ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٨ & ٢ \end{vmatrix}$

= ٢ (– ٢٤ + ٢) – ٣ (– ٣ + ١) + (٢ + ٨)

= ٢ × (– ٢٢) – ٣ × (– ٢) + ١٠

= – ٤٤ + ٦ + ١٠ = – ٢٨

مثال (٥)

أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ٤ & ٨ & ٢ \\ ٠ & ٠ & -٣ \end{vmatrix}$ باستخدام الصف أو العمود المناسب

الحل

قيمة المحدد = صفر $\begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٨ & ٢ \end{vmatrix}$ – صفر $\begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$ – ٣ $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٨ \end{vmatrix}$

= – ٣ (١٦ – ٤) = – ٣ × ١٢ = – ٣٦

تدريب

قم بفك المحدد السابق عن طريق عناصر الصف الثانى

الحل

قيمة المحدد = ... $\begin{vmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{vmatrix}$ .... $\begin{vmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{vmatrix}$ .... $\begin{vmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{vmatrix}$

= ....

....

✪ المحدد على الصورة المثلثية :

هو محدد جميع عناصره التى تحت (أو فوق) القطر الرئيسى أصفار .

وتتحدد قيمته بحاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى .

مثل : $\begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٠ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٨ & ٢ \end{vmatrix}$ = ١ × ٢ = ٢

، $\begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ٠ & ٨ & ٢ \\ ٠ & ٠ & -٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & ٠ & ٠ \\ ٤ & ٨ & ٠ \\ ٦ & ٥ & -٣ \end{vmatrix}$ = ٢ × ٨ × (– ٣) = – ٤٨

تدريب

أوجد قيمة كل محدد مما يلى :

$\begin{vmatrix} -١ & ١ & -١ \\ ٠ & ٣ & ٢ \\ ٠ & ٠ & -٣ \end{vmatrix}$ = ...

$\begin{vmatrix} -١ & ١ & -١ \\ ٠ & ٠ & ٢ \\ ٠ & ٠ & -٣ \end{vmatrix}$ = ...

إيجاد مساحة سطح المثلث باستخدام المحددات

مساحة سطح المثلث س ص ع حيث :

س = (أ ، ب) ، ص = (جـ ، ء) ، ع = (هـ ، و) هى : | م |

حيث م = $\frac{١}{٢} \begin{vmatrix} \text{أ} & \text{ب} & ١ \\ \text{جـ} & \text{ء} & ١ \\ \text{هـ} & \text{و} & ١ \end{vmatrix}$

مثال (٦)

أوجد باستخدام المحددات مساحة سطح Δ أ ب جـ الذى فيه :

أ (−٢ ، −٢) ، ب (٣ ، ١) ، جـ (−٤ ، ٣)

الحل

بفك المحدد عن طريق العمود الأخير :

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (9 + 4) - (-6 - 8) + (-2 + 6) = 31$$

∴ م $= \frac{1}{2} \times 31 = 15{,}5$ وحدة مربعة

تدريب

أوجد باستخدام المحددات مساحة سطح Δ أ ب جـ الذى فيه :

أ (−١ ، −١) ، ب (٢ ، ٤) ، جـ (−٣ ، ٥)

الحل

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

= ....

∴ م $= \frac{1}{2} \times$ .... = ... وحدة مربعة

- **ملحوظة** : لإثبات أن النقط الثلاثة تقع على استقامة واحدة نثبت أن مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه هذه النقط تساوى صفراً (أى نثبت أن Δ = صفر)

حل نظام من المعادلات الخطية بطريقة كرامر

مثال (٧)

أوجد مجموعة حل نظام المعادلات التالية بطريقة كرامر :

س = ٢ + ع − ص ، س + ٢ ص + ع = ٧ ، ٣ س + ع = ١٠ + ص

الحل

س + ص − ع = ٢
س + ٢ ص + ع = ٧
٣ س − ص + ع = ١٠

$$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

بالفك عن طريق العمود الأول :

$$\therefore \Delta = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (2 + 1) - (1 - 1) + 3(1 + 2) = 12$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 2 & 1 \\ 10 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 10\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2 + 1) - 7(1 - 1) + 10(1 + 2) = 36$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= +\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (7 - 10) - (2 + 10) + 3(2 + 7) = 12$$

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= +\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 10 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (20 + 7) - (10 + 2) + 3(7 + 4) = 48$$

$\Leftarrow$ س $= \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{36}{12} = 3$ ، ص $= \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1$

، ع $= \frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = \frac{48}{12} = 4$ ∴ مجموعة الحل = { (٣ ، ١ ، ٤) }

- **ملاحظات** :

① إذا كانت محدد المعاملات (يقرأ دلتا) $\Delta \neq$ صفر فإن للمعادلات حل وحيد

② إذا كانت Δ = صفر فإن للمعادلات عدد لا نهائى من الحلول أو ليس لها حل

تدريب

حل نظام المعادلتين الآتيتين بطريقة كرامر :

٢ س − ص = ٥ ، س + ٣ ص = −١

الحل

$\Delta = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} =$ ....

$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} =$ ....

$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} =$ ....

س = ... ، ص = ... ∴ مجموعة الحل = { (...... ، ......) }

المعكوس الضربى للمصفوفة ٢ × ٢

إذا كان للمصفوفة أ معكوساً ضربياً فإننا نرمز إليها بالرمز أ$^{-1}$

ويشترط لوجود المعكوس الضربى أن يكون محدد أ = $\Delta \neq$ صفر

إذا كان أ = $\begin{pmatrix} أ & ب \\ ج & ء \end{pmatrix}$ فإن $أ^{-1} = \frac{١}{\Delta} \begin{pmatrix} ء & -ب \\ -ج & أ \end{pmatrix}$

بدّلنا القطر الرئيسى وغيرنا إشارتى القطر الآخر

مثال (٨)

أثبت أن للمصفوفة س معكوساً ضربياً وأوجد هذا المعكوس حيث

س = $\begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix}$

الحل

$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ١٢ - ١٠ = ٢ \neq ٠$ ⇐ للمصفوفة معكوس ضربي

∴ $أ^{-1} = \frac{١}{٢} \begin{pmatrix} ٤ & -٥ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & \frac{-٥}{٢} \\ -١ & \frac{٣}{٢} \end{pmatrix}$

مثال (٩)

أوجد قيم أ التى تجعل للمصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & أ \end{pmatrix}$ معكوساً ضربياً.

الحل

$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & -١ \\ ١ & أ \end{vmatrix}$ = صفر تجعل المصفوفة ليس لها معكوس ضربي

أى: ٢أ + ١ = ٠ ⇐ أ = $-\frac{١}{٢}$

∴ أ ∈ ح − {$-\frac{١}{٢}$} تجعل للمصفوفة المعطاة معكوساً ضربياً

تدريب

أوجد قيم أ التى تجعل المصفوفة $\begin{pmatrix} أ & ١٢ \\ ٣ & أ \end{pmatrix}$ ليس لها معكوس ضربي

الحل

....

....

∴ أ ∈ { .... ، .... }

حل معادلتين آنيتين باستخدام معكوس المصفوفة

- **القاعدة**: إذا كان أ س = ج فإن س = $أ^{-1}$ ج

حيث: أ = مصفوفة المعاملات ، س = مصفوفة المتغيرات
، ج = مصفوفة الثوابت

مثال (١٠)

حل نظام المعادلتين الآنيتين التاليتين باستخدام المصفوفات:

س + ٣ ص = ٥ ، ٢ س = ٨ − ٥ ص

الحل

(١) نضع كل معادلة على الصورة: أ س + ب ص = جـ

س + ٣ ص = ٥ ، ٢ س + ٥ ص = ٨

(٢) نحول المعادلات إلى الصورة المصفوفية: أ س = ج

$\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ٨ \end{pmatrix}$

(٣) نوجد المعكوس الضربي لمصفوفة المعاملات أ = $أ^{-1}$

أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ⇐ Δ = ١ × ٥ − ٢ × ٣ = −١

$أ^{-1} = -١ \begin{pmatrix} ٥ & -٣ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix}$

(٤) نضع المعادلات على الصورة: س = $أ^{-1}$ ج

⇐ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٥ & ٣ \\ ٢ & -١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ٨ \end{pmatrix}$

∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢٥ + ٢٤ \\ ١٠ - ٨ \end{pmatrix}$ ∴ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ \\ ٢ \end{pmatrix}$

∴ س = −١ ، ص = ٢ ⇐ مجموعة الحل = {(−١ ، ٢)}

تدريب

حل نظام المعادلتين الآنيتين التاليتين باستخدام المصفوفات:

٣ س = ٥ − ٢ ص ، ٢ س + ص = ٣

الحل

$\begin{pmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{pmatrix} \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... \\ ... \end{pmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{vmatrix}$ = ...

$أ^{-1}$ = ... $\begin{pmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{pmatrix}$

⇐ $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... & ... \\ ... & ... \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ... \\ ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... \\ ... \end{pmatrix}$

س = ... ، ص = ... ⇐ مجموعة الحل = {(..... ، .....)}

تمارين (٤)

(١) حل: (أ) $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ -٥ & س \end{vmatrix} = ٠$ (ب) $\begin{vmatrix} ١١س & ١ \\ ٧ & س - ٢ \end{vmatrix} = ٤$

(٢) أوجد مساحة سطح Δ أ ب جـ الذى فيه:
أ (٣ ، ٣) ، ب (١ ، −٤) ، جـ (−٤ ، ٢)

(٣) باستخدام المحددات أثبت أن:
(٤ ، −١) ، (٣ ، ٥) ، (٥ ، −٧) تقع على استقامة واحدة.
(إرشاد: نثبت أن Δ = ٠)

(٤) حل باستخدام طريقة كرامر:
(أ) ٣ س = ١ − ٤ ص ، ٧ ص − ٥ س = ١٢

(ب) ٣ س + ٢ ص + ع = ٨ ، ٢ س – ٣ ع = ١٦ ، ٥ ص = ٧ – ٢ ع

(٥) أوجد قيم ا التى تجعل المصفوفة (ا ٢٧ / ٣ ا) ليس لها معكوس ضربى

(٦) حل باستخدام المصفوفات :

(ا) ٢ س = ٣ + ٧ ص ، ص = ٥ – س

(ب) ٢ س – ٧ ص = ٣ ، س – ٣ ص = ٢

الوحدة الثانية : البرمجة الخطية

١ – المتباينات الخطية

حل متباينات الدرجة الأولى فى مجهول واحد

• **خواص علاقة التباين فى ح :**

(١) المتباينة هى معادلة بعد استبدال علامة التساوى بعلامة التباين (< أ، > أ، ≤ أ، ≥) .

(٢) من أوجه اختلاف المتباينة عن المعادلة :

(ا) عند ضرب طرفى المعادلة فى أى عدد فالمعادلة لا تتغير بينما المتباينة لا تتغير فقط عند ضربها فى عدد موجب أما إذا ضُربت فى عدد سالب فإننا نقلب علامة التباين .

(ب) عند قسمة طرفى المعادلة على أى عدد فالمعادلة لا تتغير بينما المتباينة لا تتغير فقط عند قسمتها على عدد موجب أما إذا قُسمت على عدد سالب فإننا نقلب علامة التباين .

• **ملحوظة هامة :**

إذا كانت المتباينة فى مجهول واحد فإنه يمكن تمثيل مجموعة حلها على خط الأعداد .

أما إذا كانت المتباينة فى مجهولين فإنه يتم تمثيل مجموعة حلها بيانياً بواسطة تظليل المنطقة التى تمثل مجموعة الحل .

مثال (١)

مثّل بيانياً مجموعة حل المتباينة : ٢ س – ص ≥ ٦

الحل

س	٠	٣	١
ص	–٦	٠	–٤

ويمثل المستقيم ٢ س – ص = ٦ بخط متصل لوجود علامة (=) فى علامة التباين . كما يمكن تمثيل المستقيم بطريقة الميل والجزء المقطوع من محور الصادات كالتالى : ص = ٢ س – ٦ فيكون الميل = ٢ ، وطول الجزء المقطوع من محور الصادات = ٦ فى الاتجاه السالب من المحور .

ولكى نحدد الجهة التى نظللها كى تمثل مجموعة حل المتباينة نختار نقطة تقع فى أحد طرفى الخط الممثل للمستقيم ولتكن النقطة (٠،٠) ونعوض بها فى طرف المتباينة فنجد أنها لا تحقق المتباينة (لأن ٠ ≱ ٦) ∴ نظلل الجهة الأخرى من الخط وتكون مجموعة الحل هى المنطقة المظللة والتى لا تحتوى النقطة (٠،٠) كما هو مبين فى الرسم .

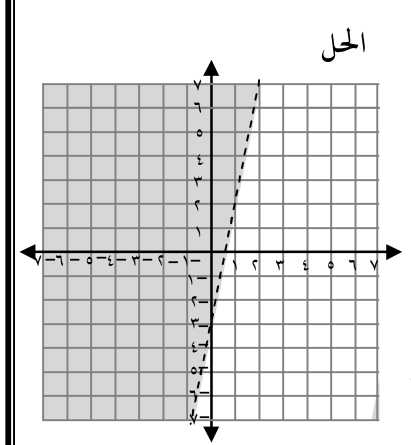
مثال (٢)

مثّل بيانياً مجموعة حل المتباينة :

ص > ٥ س – ٣

الحل

نرسم المستقيم الحدى : ص = ٥ س – ٣ بخط متقطع لعدم وجود علامة (=) بالمتباينة ، النقطة (٠،٠) تحقق المتباينة ⇐ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة



٢ ـ حل نظام من المتباينات الخطية بيانياً

مثال (٣)

أوجد حل نظام المتباينات الخطية التالى بيانياً :

٢ س + ٣ ص ≥ ٦ ، ٣ س + ٤ ص ≤ ١٢

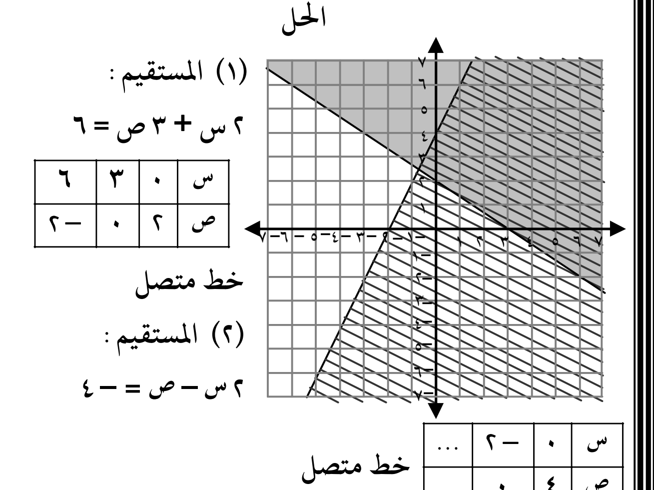
الحل

(١) المستقيم : ٢ س + ٣ ص = ٦

س	٠	٣	٦
ص	٢	٠	–٢

خط متصل

(٢) المستقيم : ٢ س – ص = –٤



س	٠	–٢	...
ص	٤	٠	...

خط متصل

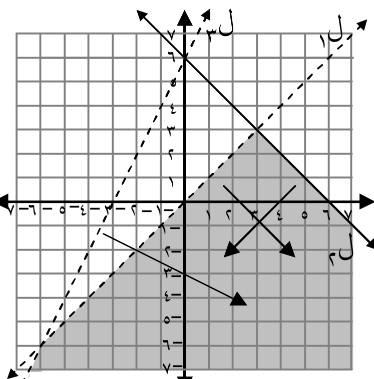
∴ مجموعة الحل تمثلها المنطقة المشتركة فى التظليل .

مثال (٤)

مثّل بيانياً مجموعة الحل لنظام المتباينات الآتية :

ص – س > ٠ ، ٢ س + ٢ ص ≥ ١٢ ، ص < ٦ + ٢ س

الحل



المستقيم الحدى $ل_1$:

ص – س = ٠

يمر بنقطة الأصل وميله = ١ يمثل بخط متقطع

، المستقيم الحدى $ل_2$:

ص = ٦ – س

يقطع ٦ وحدات من محور الصادات الموجب وميله = –١ (زاوية ميله منفرجة)

يمثل بخط متصل

، المستقيم الحدى $ل_3$: ص = ٦ + ٢ س يقطع ٦ وحدات من محور الصادات الموجب وميله = ٢ ويمثل بخط متقطع

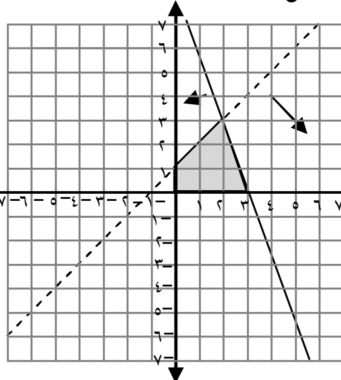
منطقة الحل هى المنطقة المشتركة فى التظليل

مثال (٥)

مثّل بيانياً مجموعة الحل للمتباينات التالية :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ص + ٣ س ≤ ٩ ، ص – س < ١

الحل



س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

تعنى الربع الأول

مجموعة الحل للمتباينات الأربعة تمثلها المنطقة الواقعة فى الربع الأول والمشتركة فى التظليل .

تدريب (١)

مثّل بيانياً مجموعة الحل لنظام المتباينات الآتية :

س ≤ ٤ ، ص < س + ٢ ، س + ٢ ص ≥ –٢

الحل

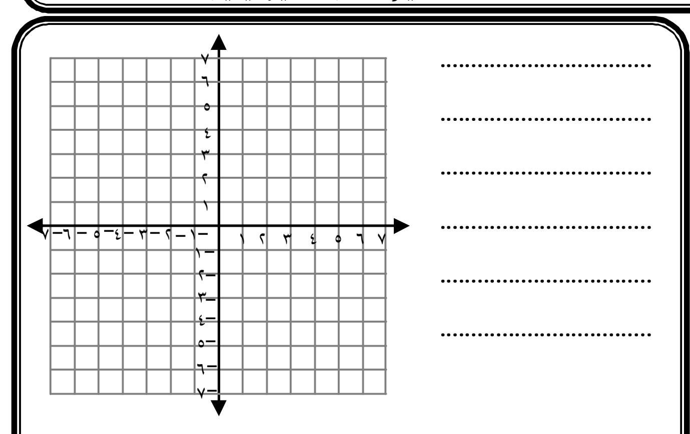
....

....

....

....

....



....

....

....

....

....

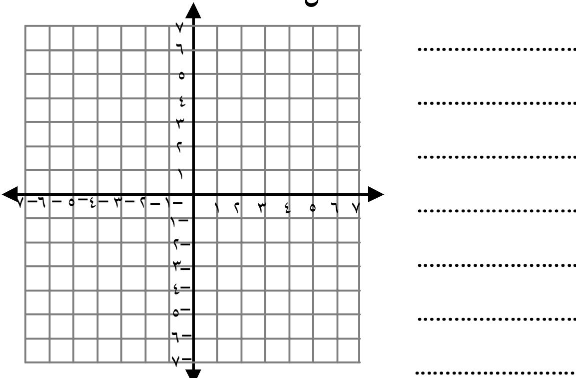
....

تدريب (٢)

مثّل بيانياً مجموعة الحل لنظام المتباينات الآتية :

ص ≥ ٢ س + ٦ ، ص + ٣ س ≤ –١

الحل



....

....

....

....

....

....

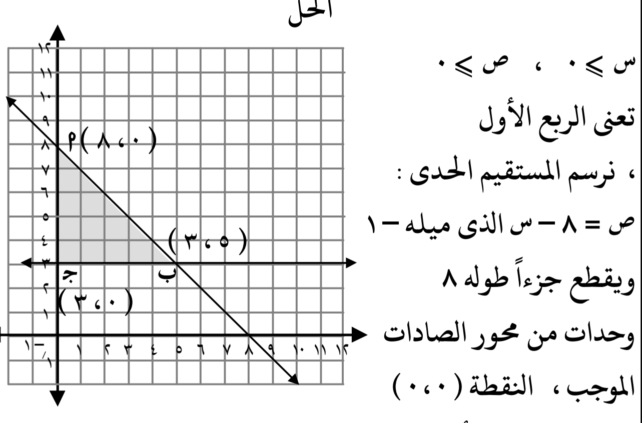
....

٣ ـ البرمجة الخطية والحل الأمثل

مثال (٦)

باستخدام البرمجة الخطية أوجد قيمتى س ، ص التى تجعل قيمة الدالة : ر = ٣ س + ٢ ص قيمة عظمى ثم قيمة صغرى تحت القيود : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٨ ، ص ≥ ٣

الحل



س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

تعنى الربع الأول

، نرسم المستقيم الحدى :

ص = ٨ – س الذى ميله –١ ويقطع جزءاً طوله ٨ وحدات من محور الصادات الموجب ، النقطة (٠، ٠) تحقق المتباينة (لأن ٠ < ٨) ∴ مجموعة الحل لهذه المتباينة يمثلها نقاط المستقيم ∪ نصف المستوى الذى تقع فيه نقطة الأصل

، نرسم المستقيم الحدى : ص = ٣ وهو خط مستقيم يوازى

محور السينات ويقطع جزءاً طوله ٣ وحدات من المحور الصادى الموجب ، النقطة (٠،٠) لا تحقق المتباينة (لأن ٠ ≮ ٣)

∴ مجموعة الحل لهذه المتباينة يمثلها نقاط المستقيم ∪ نصف المستوى الذى لا تقع فيه نقطة الأصل

ر[أ] = ٣ (٠) + ٢ (٨) = ١٦

، ر[ب] = ٣ (٥) + ٢ (٣) = ٢١

، ر[جـ] = ٣ (٠) + ٢ (٣) = ٦

القيمة العظمى لدالة الهدف = ٢١ عند النقطة (٣،٥)،

القيمة الصغرى لدالة الهدف = ٦ عند النقطة (٣،٠)

مثال (٧)

باستخدام البرمجة الخطية أوجد كلاً من القيمة الصغرى والقيمة الكبرى للدالة : ر = س + ص تحت القيود :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ص ≥ ٢ س − ٢ ، ص ≤ − س + ٨

الحل

نقطة الأصل تحقق كلا المتباينتين

∴ مجموعة الحل تمثلها المنطقة المظللة

ولتحديد إحداثي النقطة ب نحل المعادلتين

ص = ٢ س − ٢ ، ص = − س + ٨ معاً

بالتعويض من (١) فى (٢):

∴ ٢ س − ٢ = − س + ٨ ⇐ ٣ س = ١٠ ⇐ س = $\frac{١٠}{٣}$

بالتعويض فى (٢) ⇐ ص = − $\frac{١٠}{٣}$ + ٨ = $\frac{١٤}{٣}$

∴ ب = (− $\frac{١٠}{٣}$ ، $\frac{١٤}{٣}$)

∵ دالة الهدف : ر = س + ص

∴ ر[أ] = (٠) + (٨) = ٨

، ر[ب] = (− $\frac{١٠}{٣}$) + ($\frac{١٤}{٣}$) = $\frac{٤}{٣}$

، ر[جـ] = (١) + (٠) = ١

، ر[و] = (٠) + (٠) = ٠

∴ القيمة العظمى لدالة الهدف = ٨ عند النقطة (٠،٨)

، القيمة الصغرى لدالة الهدف = ٠ عند النقطة (٠،٠)

تطبيقات حياتية على البرمجة الخطية

مثال (٨)

ينتج مصنع صغير للأثاث المعدنى ٢٠ دولاباً أسبوعياً على الأكثر من نوعين مختلفين أ ، ب ، فإذا كان ربحه من النوع (أ) هو ٨٠ جنيهاً وربحه من النوع (ب) هو ١٠٠ جنيه ، وكان مايباع من النوع الأول لا يقل عن ثلاثة أمثال مايباع من النوع الثانى . أوجد عدد الدواليب من كل نوع ليحقق المصنع أكبر ربح ممكن .

الحل

نفرض أن عدد النوع الأول = س ، عدد النوع الثانى = ص

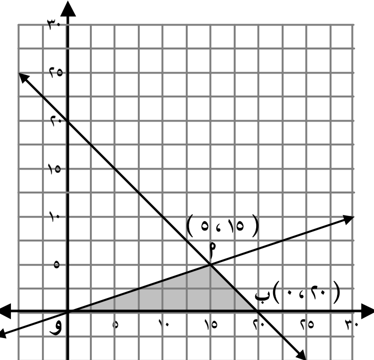
يكون : س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٢٠ ، س ≥ ٣ ص

دالة الهدف هى الربح (ر) أكبر مايمكن : ر = ٨٠ س + ١٠٠ ص

مجموعة الحل هى المنطقة المشتركة فى التظليل

دالة الهدف الربح أكبر مايمكن حيث :

ر = ٨٠ س + ١٠٠ ص



∴ ر[أ] = ٨٠ (١٥) + ١٠٠ (٥) = ١٧٠٠

، ر[ب] = ٨٠ (٢٠) + ١٠٠ (٠) = ١٦٠٠

، ر[و] = ٨٠ (٠) + ١٠٠ (٠) = ٠

⇐ لكى يحقق المصنع أكبر ربح يجب أن ينتج ١٥ دولاباً من النوع الأول ، وخمسة دواليب من النوع الثانى .

مثال (٩)

سلعتان غذائيتان تعطى الأولى ٣ سعرات حرارية وبها ٥ وحدات من فيتامين سى ، والثانية تعطى ٦ سعرات حرارية وبها وحدتان من فيتامين سى . فإذا كان المطلوب هو ٣٦ سعراً حرارياً على الأقل ، ٢٥ وحدة من فيتامين سى على الأقل ، وبفرض أن سعر الوحدة من السلعة الأولى ٦ جنيهات ومن الثانية ٨ جنيهات ، فما الكمية الواجب شراؤها من كل من السلعتين لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة ممكنة .

الحل

نفرض عدد السلعة الأولى = س ، عدد السلعة الثانية = ص

عدد السلع	النوع الأول (س)	النوع الثانى (ص)	الحد الأقصى
السعرات	٣	٦	٣٦
الفيتامين	٥	٢	٢٥
التكلفة	٦	٨	ر

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ٣ س + ٦ ص ≥ ٣٩ ، ٥ س + ٢ ص ≥ ٢٥

، دالة الهدف : ر = ٦ س + ٨ ص اقل مايمكن

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ تعنى الربع الأول

المستقيم الحدى المتصل ل١ :

٣ س + ٦ ص = ٣٩

أى : ص = ٦,٥ − $\frac{1}{2}$ س

النقطة (٠،٠) لا تحقق المتباينة

⇐ مجموعة الحل هى المنطقة الأعلى كما موضحة بالسهم

المستقيم الحدى ل٢ : ٥ س + ٢ ص = ٢٥

س	٠	٥	...
ص	١٢,٥	٠	...

(٠،٠) لا تحقق المتباينة

∵ دالة الهدف : ر = ٦ س + ٨ ص اقل مايمكن

∴ [ر]أ = ٦ (٠) + ٨ (١٢,٥) = ١٠٠

، [ر]ب = ٦ (٣) + ٨ (٥) = ٥٨

، [ر]جـ = ٦ (١٢) + ٨ (٠) = ٧٢

لتحقيق المطلوب بأقل تكلفة ممكنة يجب شراء ٣ وحدات من النوع الأول ، ٥ وحدات من النوع الثانى .

تمارين (٥)

(١) أوجد مجموعة الحل فى ح للمتباينة التالية بيانياً :
٢ س − ٢ ص ≥ ٦

(٢) أوجد مجموعة الحل فى ح × ح للمتباينة التالية بيانياً :
ص ≤ ٥

(٣) أوجد مجموعة الحل فى ح للمتباينة التالية بيانياً :
ص > ٢ س − ٣

(٤) حل نظام المتباينات التالى بيانياً فى ح × ح :
س ≤ ٤ ، ص > س + ٢ ، س + ٢ ص ≥ −٢

(٥) حل نظام المتباينات التالى بيانياً فى ح × ح :
س + ٤ ص > ٤ ، ٤ س + ص ≥ ٢ ، س − ص > ١

(٦) مثّل نظام المتباينات التالى ثم أوجد النقطة التى تحقق دالة الهدف : س + ص ≤ ٥ ، ص ≥ ١ ، س ≥ ٢
، دالة الهدف : ر = ٢ س + ٣ ص أصغر مايمكن

(٧) مثّل نظام المتباينات التالى ثم أوجد النقطة التى تحقق دالة الهدف :
س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، ص + ٢ س ≥ ١٠ ، س + ٤ ص ≥ ١٢
، دالة الهدف : ر = ٢ ص + ٥ س أكبر مايمكن .

(٨) يبيع أحد محال المأكولات البحرية نوعين من الأسماك المطهية أ ، ب ، ولاتقل الطلبات من صاحب المحل عن ٥٠ سمكة ، كما أنه لا يستخدم أكثر من ٣٠ سمكة من النوع (أ) ، ولا يستخدم أكثر من ٣٥ سمكة من النوع (ب) ، فإذا علمت أن ثمن السمكة من النوع (أ) هو ٤ جنيهات ،ومن النوع (ب) هو ٣ جنيهات ، كم سمكة من كل نوع يجب استخدامها لتحقيق اقل ثمن ممكن للشراء ؟

(٩) ينتج أحد مصانع الآلات الموسيقية نوعين من آلات النفخ ، يحتاج تصنيع النوع الأول إلى ٢٥ وحدة من النحاس ، ٤ وحدات من النيكل ، ويحتاج تصنيع النوع الثانى ١٥ وحدة من النحاس ، ٨ وحدات من النيكل ، فإذا كانت الكمية المتاحة فى المصنع فى أحد الأيام ٩٥ وحدة من النحاس ، ٣٢ وحدة من النيكل ، وكان ربح المصنع فى الآلة من النوع الأول هو ٦٠ جنيهاً وربحه فى الآلة من النوع الثانى ٤٨ جنيهاً ، فما عدد الآلات التى يجب أن ينتجها المصنع من كل نوع حتى يحقق أكبر ربح ممكن ؟

الوحدة الثالثة : المتجهات

١ – الكميات القياسية والكميات المتجهة والقطعة المستقيمة الموجهة

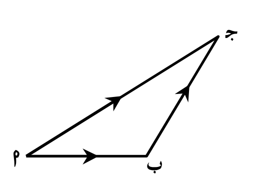
✪ الفرق بين الكمية القياسية والكمية المتجهة :

الكمية القياسية : تتحدد تماماً بمعرفة مقدارها فقط مثل الطول والمسافة والمساحة ....

الكمية المتجهة : تتحدد تماماً بمعرفة مقدارها واتجاهها مثل السرعة والقوة والإزاحة ......

• **الفرق بين المسافة والإزاحة** :

فى الشكل المجاور :



المسافة بين النقطتين أ ، جـ :

هى كمية قياسية = أب + ب جـ

= جـ ب + ب أ

الإزاحة من أ إلى جـ هى المسافة بين نقطتى البداية والنهاية فقط وتكون فى اتجاه واحد من أ إلى جـ = $\overrightarrow{أجـ}$

مثال (١)

تحرك شخص من النقطة أ إلى النقطة ب ثم إلى النقطة جـ ثم إلى النقطة ء ثم إلى النقطة هـ . احسب المسافة والإزاحة الحادثة .

الحل

المسافة = أب + ب جـ + جـ ء + ء هـ = ٣ + ٤ + ٣ + ٥ = ١٥ متر

الإزاحة = ٦ متر فى اتجاه أ هـ

تدريب

أ ب جـ ء مربع طول ضلعه ٤ متر ، تحرك شخص من أ إلى ب إلى جـ وتوقف عند ء فإن :

المسافة = ... متر

الإزاحة = ... متر فى اتجاه ....

✪ **القطعة المستقيمة الموجهة** : تتحدد بثلاثة عناصر هى :

① نقطة البداية .

② نقطة النهاية .

③ الاتجاه من نقطة البداية إلى نقطة النهاية

● **ملاحظات** :

إذا كان $\overrightarrow{\text{أب}}$ // $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$ ، هـ ∈ $\overrightarrow{\text{أب}}$ فإن :

① أب = ء جـ بينما $\overrightarrow{\text{أب}} \neq \overrightarrow{\text{ء جـ}}$ لاختلافهما فى الاتجاه

② $\overrightarrow{\text{أهـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{بهـ}}$ متضادان فى الاتجاه ويحملهما مستقيم واحد

③ $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$ متضادين فى الاتجاه ويحملهما مستقيمان متوازيان

✪ **معيار القطعة المستقيمة الموجهة** :

هو طول $\overrightarrow{\text{أب}}$ ونرمز له بالرمز $\|\overrightarrow{\text{أب}}\|$

حيث $\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \|\overrightarrow{\text{ب أ}}\|$ = أب

✪ **تكافؤ قطعتين مستقيمتين موجهتين** :

تتكافأ القطعتان الموجهتان إذا كانتا :

① لهما نفس الطول (المعيار) ② لهما نفس الاتجاه

● **ملاحظات** :

(١) إذا كانت أ ، ب ، جـ ، ء أربع نقط لا تقع على استقامة واحدة وكانت $\overrightarrow{\text{أب}}$ تكافئ $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$ فإن الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع

(٢) يوجد عدد لا نهائى من القطع المستقيمة الموجهة التى يمكن رسمها فى المستوى وكل منها تكافئ $\overrightarrow{\text{أب}}$.

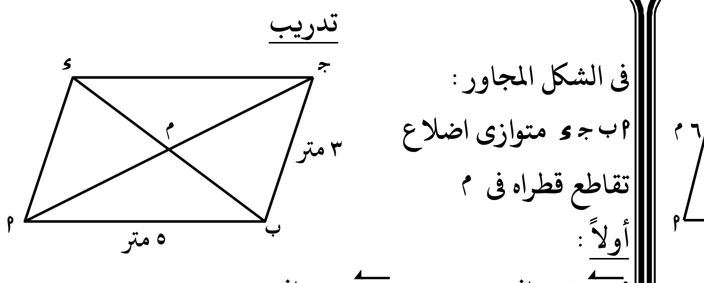
(٣) توجد قطعة مستقيمة موجهة وحيدة يمكن رسمها من النقطة جـ بحيث تكافئ قطعة مستقيمة موجهة $\overrightarrow{\text{أب}}$.

تدريب

في الشكل المجاور :

أ ب جـ ء متوازى اضلاع

تقاطع قطراه فى م



أولاً :

$\overrightarrow{\text{أب}}$ تكافئ .... ، $\overrightarrow{\text{جـ ء}}$ تكافئ ....

، $\overrightarrow{\text{ب جـ}}$ تكافئ .... ، $\overrightarrow{\text{أ م}}$ تكافئ ....

، $\overrightarrow{\text{م ء}}$ تكافئ .... ، $\|\overrightarrow{\text{أ ء}}\|$ = ... ، $\|\overrightarrow{\text{جـ ء}}\|$ = ...

ثانياً :

$\overrightarrow{\text{أ م}}$ لا تكافئ $\overrightarrow{\text{أ جـ}}$ لأنهما ....

$\overrightarrow{\text{ب أ}}$ لا تكافئ $\overrightarrow{\text{ء جـ}}$ لأنهما ....

$\overrightarrow{\text{ب م}}$ لا تكافئ $\overrightarrow{\text{ء م}}$ لأنهما ....

$\overrightarrow{\text{أ م}}$ لا تكافئ $\overrightarrow{\text{أ ء}}$ لأنهما ....

٢ – المتجهات

✪ **متجه الموضع لنقطة معلومة** :

هو القطعة المستقيمة الموجهة التى بدايتها نقطة الأصل ونهايتها النقطة المعلومة ونرمز له بنقطة واحدة مثل $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$

✪ **معيار متجه الموضع** :

إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (س ، ص) فإن $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

مثال (٢)

إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}}$ = (٣ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ = (٥ ، ١٢) ، $\overrightarrow{\text{جـ}}$ = (−٨ ، ٦)

فأوجد : $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ ، $\|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ ، $\|\overrightarrow{\text{جـ}}\|$.

الحل

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(٣)^2 + (٤)^2}$ = ٥ وحدات طول

$\|\overrightarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{(٥)^2 + (١٢)^2}$ = ١٣ وحدة طول

$\|\overrightarrow{\text{جـ}}\| = \sqrt{(٨)^2 + (٦)^2}$ = ١٠ وحدات طول

✪ **الصورة القطبية لمتجه الموضع $\overrightarrow{\text{أ}}$** :

هى الزوج المرتب ($\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ ، θ) حيث θ هى قياس الزاوية التى يصنعها $\overrightarrow{\text{أ}}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ، ويكون :

س = $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جتا θ ، ص = $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ جا θ

مثال (٣)

أوجد الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ = ($٨\sqrt{٣}$ ، ٨)

الحل

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(٨\sqrt{٣})^2 + (٨)^2} = \sqrt{٢٥٦}$ = ١٦

ظا θ = $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٨}{٨\sqrt{٣}}$ ⇐ θ = ظا$^{-1}$ ($\frac{٨}{٨\sqrt{٣}}$) = ٣٠°

∴ $\overrightarrow{أ}$ = (١٦ ، ٣٠°)

مثال (٤)

إذا كان $\overrightarrow{جـ}$ = (١٢ $\sqrt{٢}$ ، ١٣٥°) فأوجد إحداثي نقطة جـ .

الحل

س = ١٢ $\sqrt{٢}$ جتا ١٣٥° = − ١٢ ، ص = ١٢ $\sqrt{٢}$ جا ١٣٥° = ١٢

⇐ $\overrightarrow{جـ}$ = (−١٢ ، ١٢)

تدريب

أوجد الصورة القطبية للمتجه $\overrightarrow{و أ}$ = (١ ، $\sqrt{٣}$) .

الحل

|| $\overrightarrow{و أ}$ || = $\sqrt{(......)^٢ + (......)^٢}$ = ...

ظا θ = $\frac{.....}{.....}$ = $\sqrt{٣}$ ⇐ θ = ظا$^{-١}$ (..........) = ...°

∴ $\overrightarrow{أ}$ = (....... ، ....°)

تدريب

إذا كان $\overrightarrow{ب}$ = (٣ $\sqrt{٢}$ ، ٤٥°) فأوجد إحداثي نقطة جـ .

الحل

س = ... = ... ، ص = ... = ...

⇐ $\overrightarrow{ب}$ = (......... ، ....)

• **ملحوظة** : المتجه الصفرى $\overrightarrow{و}$ = (٠ ، ٠) حيث || $\overrightarrow{و}$ || = ٠ وهو غير محدد الاتجاه .

✪ **جمع متجهين جبرياً** :

مثلاً : إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، ١) فإن :

$\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٣) + (٤ ، ١) = (٢ + ٤ ، ٣ + ١) = (٦ ، ٤)

، $\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، ٣) − (٤ ، ١) = (٢ − ٤ ، ٣ − ١) = (−٢ ، ٢)

عملية جمع المتجهين هى عملية إبدالية دامجة :

$\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{ب}$ = $\overrightarrow{ب}$ + $\overrightarrow{أ}$

المحايد الجمعى هو المتجه الصفرى (و) = (٠ ، ٠) :

$\overrightarrow{أ}$ + $\overrightarrow{و}$ = $\overrightarrow{و}$ + $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{أ}$

المعكوس الجمعى للمتجه $\overrightarrow{أ}$ هو المتجه − $\overrightarrow{أ}$

✪ **ضرب متجه فى عدد حقيقى** :

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (ل ، م) ، ك ∈ ح فإن : ك $\overrightarrow{أ}$ = (ك ل ، ك م)

مثال (٥)

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، −١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٤ ، ٤) فأوجد ٣ $\overrightarrow{أ}$ − $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{ب}$

الحل

٣ $\overrightarrow{أ}$ − $\frac{١}{٢}$ $\overrightarrow{ب}$ = ٣ (٢ ، −١) − $\frac{١}{٢}$ (−٤ ، ٤)

= (٦ ، −٣) + (٢ ، −٢) = (٨ ، −٥)

تدريب

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (−٢ ، ٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، −١) فأوجد

|| ٢ $\overrightarrow{أ}$ + ٣ $\overrightarrow{ب}$ ||

الحل

٢ $\overrightarrow{أ}$ + ٣ $\overrightarrow{ب}$ = ٢ (−٢ ، ٣) + ٣ (٤ ، −١)

= (......... ، ....) + (.... ، ....) = (...... ، ......)

∴ || ٢ $\overrightarrow{أ}$ + ٣ $\overrightarrow{ب}$ || = || (..... ، .....) ||

= $\sqrt{........................}$ = ...

✪ **تساوى متجهين** :

مثال (٦)

إذا كان (٣ ، س) – ص (−١ ، ٢) = (٤ ، −٥) فما قيمة : س + ص

الحل

(٣ ، س) + (ص ، −٢ ص) = (٤ ، −٥)

⇐ (٣ + ص ، س − ٢ ص) = (٤ ، −٥)

∴ ٣ + ص = ٤ ⇐ ص = ١ ، س − ٢ = −٥ ⇐ س = −٣

∴ س + ص = −٣ + ١ = −٢

تدريب

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (ل ، −١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، م + ل) وكان $\overrightarrow{أ}$ = $\overrightarrow{ب}$

أوجد قيمة كل من : ل ، م

الحل

ل = ٤ ⇐ م + ٤ = −١ ⇐ م = −١ − ٤ = −٥

✪ **متجه الوحدة** : هو متجه معياره الوحدة .

مثل : ($\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥}$) ، ($\frac{٥}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$) ، .....

✪ **متجها الوحدة الأساسيان** $\overrightarrow{س}$ ، $\overrightarrow{ص}$:

$\overrightarrow{س}$ = (١ ، ٠) وهو متجه موضع فى الاتجاه الموجب لمحور السينات طوله الوحدة

$\overrightarrow{ص}$ = (٠ ، ١) وهو متجه موضع فى الاتجاه الموجب لمحور الصادات طوله الوحدة

✪ **التعبير عن المتجه بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين** :

مثلاً : $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ٣) = ٢ $\overrightarrow{س}$ + ٣ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ب}$ = (−١ ، ٤) = − $\overrightarrow{س}$ + ٤ $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{جـ}$ = (٢ ، −١) = ٢ $\overrightarrow{س}$ − $\overrightarrow{ص}$

، $\overrightarrow{ء}$ = (٠ ، −٢) = −٢ $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{هـ}$ = (٧ ، ٠) = ٧ $\overrightarrow{س}$

مثال (٧)

أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن كل من

(١) إزاحة جسم مسافة ٣٤ سم فى اتجاه الجنوب

(٢) قوة مقدارها ٦٠ ث كجم تؤثر على جسيم فى اتجاه ٣٠° شمال الغرب

الحل

(١) نفرض أن متجه الموضع للإزاحة = $\overrightarrow{أ}$ ، θ = ٢٧٠°

∴ الصورة القطبية : $\overrightarrow{أ}$ = (٣٤ ، ٢٧٠°)

∴ الصورة الإحداثية : $\overrightarrow{أ}$ = (٣٤ جتا ٢٧٠ ، ٣٤ جا ٢٧٠)

= (٠ ، −٣٤) = −٣٤ $\overrightarrow{ص}$

(٢) نفرض أن متجه الموضع للقوة $\overrightarrow{ب}$ ، θ = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠°

∴ الصورة القطبية $\overrightarrow{ب}$ = (٦٠ ، ١٥٠°)

∴ الصورة الإحداثية $\overrightarrow{ب}$ = (٦٠ جتا ١٥٠ ، ٦٠ جا ١٥٠)

= (−٣٠ $\sqrt{٣}$ ، ٣٠) = −٣٠ $\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{س}$ + ٣٠ $\overrightarrow{ص}$

تدريب

أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن قوة مقدارها ٥٠ نيوتن تؤثر على جسيم فى اتجاه الشمال الغربى

الحل

نفرض أن متجه الموضع للقوة هو .... ، θ = ... °

∴ الصورة القطبية : $\overrightarrow{أ}$ = (....... ، ....°)

∴ الصورة الإحداثية : $\overrightarrow{أ}$ = (...................... ، ....)

= (............ ، ....) = ...

✪ **ميل المتجه** (س ، ص) = $\frac{ص}{س}$

✪ **شرط توازى متجهين** : (م١ = م٢)

ميل المتجه الأول = ميل المتجه الثانى

✪ **شرط تعامد متجهين** : (م١ × م٢ = −١)

ميل المتجه الأول = − مقلوب ميل المتجه الثانى

مثال (٨)

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (م ، ٣) ، $\overrightarrow{ج}$ = (٤ ، ن) :

(أولاً) أوجد قيمة م إذا علمت أن $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$.

(ثانياً) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ج}$ فأوجد قيمة ن .

الحل

(أولاً) ∵ $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$

∴ ميل $\overrightarrow{أ}$ = − مقلوب ميل $\overrightarrow{ب}$ ∴ $\frac{٤}{٢}$ = − $\frac{م}{٣}$ ⟸ م = −٦

(ثانياً) ∵ $\overrightarrow{أ}$ // ج

∴ ميل $\overrightarrow{أ}$ = ميل $\overrightarrow{ج}$ ∴ $\frac{٤}{٢}$ = $\frac{ن}{٤}$ ⟸ ن = ٨

تدريب

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (−٤ ، ٦) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٦ ، ٩) ، $\overrightarrow{ج}$ = (٣ ، ٢)

أثبت أن : $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ⊥ $\overrightarrow{ج}$

الحل

ميل $\overrightarrow{أ}$ = $\frac{٦}{-٤}$ = $\frac{-٣}{٢}$ ، ميل $\overrightarrow{ب}$ = $\frac{.....}{.....}$ = $\frac{.....}{.....}$

، ميل $\overrightarrow{ج}$ = $\frac{.....}{.....}$ = $\frac{.....}{.....}$

∵ .... ∴ ....

، ∵ .... = − .... ⟸ ....

مثال (٩)

إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٦ ، ٩) ، $\overrightarrow{ب}$ = ك (٢ ، ٣)

أذكر العلاقة بين $\overrightarrow{أ}$ ، $\overrightarrow{ب}$ ثم أوجد قيمة ك

الحل

∵ ميل $\overrightarrow{أ}$ = $\frac{٩}{٦}$ = $\frac{٣}{٢}$ = ميل $\overrightarrow{ب}$ ∴ $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$

∴ (٦ ، ٩) = (٢ك ، ٣ك) ⟸ ٦ = ٢ك ⟸ ك = $\frac{٦}{٢}$ = ٣

تمارين (٦)

(١) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٥ ، −٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{ج}$ = (٤ ، ٠)

أوجد : ① || ٢ $\overrightarrow{أ}$ + ٣ $\overrightarrow{ب}$ || ② || $\overrightarrow{أ}$ − $\overrightarrow{ب}$ + ٢ $\overrightarrow{ج}$ ||

(٢) أوجد قيم م ، ن فى كل مما يأتى :

① ٣ (٢ ، س) + ٢ (ص ، ٢) = (٠ ، ٢)

② س (٣ ، ص) = ٦ $\overrightarrow{س}$ + ٦ $\overrightarrow{ص}$

③ (س − ٢ ، ٥) = (٤ ، ٢ س − ص)

(٣) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (م ، ٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ن) ، $\overrightarrow{أ}$ = ٣ $\overrightarrow{ب}$

أوجد قيمة كل من : م ، ن

(٤) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (م ، ٣) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٣ ، ٦) ، $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$

ما قيمة م ؟

(٥) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، م) ، $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$

فما قيمة م ؟

(٦) إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٥ ، −٢) ، $\overrightarrow{ب}$ = (−٣ ، ٢) ، $\overrightarrow{ج}$ = (٤ ، ٠)

أوجد المتجه $\overrightarrow{ى}$ الذى يحقق $\overrightarrow{ى}$ = ٢ $\overrightarrow{أ}$ − ٣ $\overrightarrow{ب}$ + ٢ $\overrightarrow{ج}$

(٧) أوجد الصورة القطبية لكل من المتجهات الآتية :

Ⓐ $\overrightarrow{و أ}$ = (٢ ، ٢ $\sqrt{٣}$)

Ⓑ $\overrightarrow{ب}$ = ٧ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{س}$ − ٧ $\sqrt{٢}$ $\overrightarrow{ص}$

(٨) أوجد بدلالة متجهى الوحدة الأساسيين المتجه الذى يعبر عن :

Ⓐ سرعة منتظمة مقدارها ٣٧ كم / ساعة فى اتجاه الشمال

Ⓑ قوة مقدارها ٦٠ نيوتن تؤثر على جسم باتجاه ٣٠° شمال الشرق

Ⓒ إزاحة جسم مسافة ٤٠ سم فى اتجاه ٣٠° جنوب الشرق

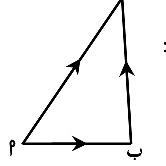
العمليات على المتجهات

✪ **جمع المتجهات هندسياً :**

أولاً : قاعدة المثلث لجمع متجهين :

إذا كان نهاية المتجه الأول هى بداية للمتجه الثانى :

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج} = \overrightarrow{أج}$



ملحوظة هامة : $\overrightarrow{أب} = -\overrightarrow{بأ}$ لأن $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بأ} = \overrightarrow{و}$

مثال (١)

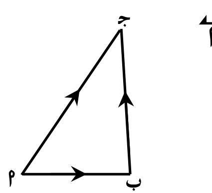
أثبت أنه فى أى مثلث أ ب ج يكون : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج} + \overrightarrow{جأ} = \overrightarrow{٠}$

الحل

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج} + \overrightarrow{جأ} = (\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج}) + \overrightarrow{جأ}$

$= \overrightarrow{أج} + \overrightarrow{جأ}$

$= \overrightarrow{أج} - \overrightarrow{أج} = \overrightarrow{٠}$



حل آخر :

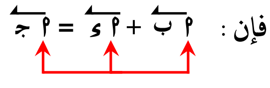
$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج} + \overrightarrow{جأ} = \overrightarrow{أب} + (\overrightarrow{بج} + \overrightarrow{جأ})$

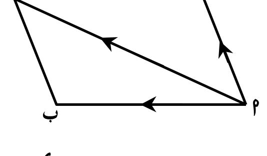
$= \overrightarrow{أب} +$ .... $= \overrightarrow{أب} -$ .... = ...

ثانياً : قاعدة متوازى الأضلاع لجمع متجهين :

إذا كان المتجهان لهما نفس نقطة البداية :

فإن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أد} = \overrightarrow{أج}$





نتيجة :

فى △ أ ب ج :

إذا كانت م منتصف $\overline{بد}$

فإن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أد} = ٢\overrightarrow{أم}$

مثال (٢)

فى أى شكل رباعى أ ب ج د أثبت أن : $\overrightarrow{أج} + \overrightarrow{بد} = \overrightarrow{بج} + \overrightarrow{أد}$

الحل

فى △ أ ب ج : $\overrightarrow{أج} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج}$

فى △ أ ب د : $\overrightarrow{بد} = \overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{أد}$ وبالجمع :

$\overrightarrow{أج} + \overrightarrow{بد} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج} + \overrightarrow{بأ} + \overrightarrow{أد}$

$= (\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بأ}) + \overrightarrow{بج} + \overrightarrow{أد}$

$= (\overrightarrow{أب} - \overrightarrow{أب}) + \overrightarrow{بج} + \overrightarrow{أد} = \overrightarrow{بج} + \overrightarrow{أد}$

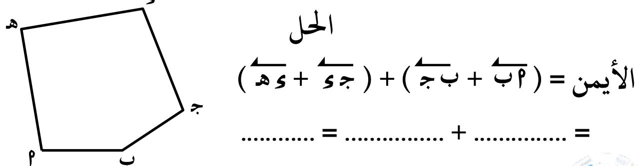
تدريب

فى الشكل أ ب ج د هـ أثبت أن : $\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج} + \overrightarrow{جد} + \overrightarrow{دهـ} = \overrightarrow{أهـ}$

الحل

الأيمن $= (\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج}) + (\overrightarrow{جد} + \overrightarrow{دهـ})$

= .... + ... = ...



مثال (٣)

أ ب ج د متوازى أضلاع فيه هـ منتصف $\overline{بج}$ أثبت أن :

$\overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دج} = ٢\overrightarrow{أهـ}$

الحل

$\overrightarrow{أب} + (\overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دج}) = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{أج}$

$= ٢\overrightarrow{أهـ}$

مثال (٤)

أ ب ج △ ، د ∈ $\overline{بج}$ بحيث $٣\overrightarrow{بد} = ٤\overrightarrow{دج}$

أثبت أن : $٣\overrightarrow{أب} + ٤\overrightarrow{أج} = ٧\overrightarrow{أد}$

الحل

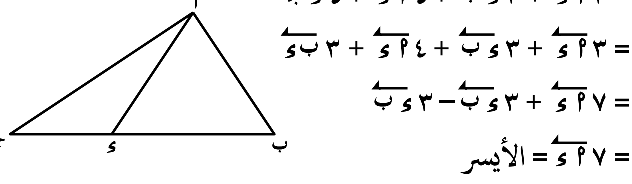
الأيمن $= ٣(\overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دب}) + ٤(\overrightarrow{أد} + \overrightarrow{دج})$

$= ٣\overrightarrow{أد} + ٣\overrightarrow{دب} + ٤\overrightarrow{أد} + ٤\overrightarrow{دج}$

$= ٣\overrightarrow{أد} + ٣\overrightarrow{دب} + ٤\overrightarrow{أد} + ٣\overrightarrow{بد}$

$= ٧\overrightarrow{أد} + ٣\overrightarrow{دب} - ٣\overrightarrow{دب}$

$= ٧\overrightarrow{أد} =$ الأيسر



• **ملاحظة (١) :**

لإثبات ان الشكل الرباعى شبة منحرف نثبت أن فيه ضلعين متقابلين متوازيان وغير متساويان فى الطول

مثال (٤)

أ ب ج د شكل رباعى فيه $\overrightarrow{بج} = ٢\overrightarrow{أد}$ أثبت أنه شبة منحرف

الحل

∵ $\overrightarrow{بج} = ٢\overrightarrow{أد}$ ∴ $\overline{بج} \parallel \overline{أد}$ .... (١)

، ب ج = ٢ أ د أى أن : ب ج ≠ أ د .... (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الشكل أ ب ج د شبة منحرف

✪ **التعبير عن القطعة المستقيمة الموجهة $\overrightarrow{أب}$ بدلالة متجهى الموضع لطرفيها**

نعلم أن : $\overrightarrow{وأ} + \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{وب}$

أى أن : $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب}$

ومنها $\boxed{\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}}$

• **ملاحظة (٢) :**

لإثبات أن الشكل الرباعى متوازى أضلاع نثبت أن فيه ضلعين متقابلين متوازيان ومتساويان فى الطول .

مثال (٥)

أثبت أن الشكل أ ب ج د الذى فيه : أ (٢ ، −١) ، ب (٧ ، ١) ، ج (٤ ، ٤) ، د (−١ ، ٢) متوازى أضلاع .

الحل

∵ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (٧ ، ١) − (٢ ، −١) = (٥ ، ٢)

، $\overrightarrow{ءج}$ = $\overrightarrow{ج}$ − $\overrightarrow{ء}$ = (٤ ، ٤) − (−١ ، ٢) = (٥ ، ٢)

∴ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ءج}$ ⇐ الشكل أ ب ج ء متوازى أضلاع

• **ملاحظة** (٣) :

لإثبات أن الشكل الرباعى مستطيل : نثبت أنه متوازى أضلاع وفيه ضلعان متجاوران متعامدان .

مثال (٦)

أ ب ج ء شكل رباعى فيه أ (٩ ، ٠) ، ب (٨ ، ٤) ، ج (٠ ، ٢) ، ء (١ ، −٢) . أثبت أنه مستطيل ثم أوجد مساحته .

الحل

∵ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (٨ ، ٤) − (٩ ، ٠) = (−١ ، ٤)

، $\overrightarrow{ءج}$ = $\overrightarrow{ج}$ − $\overrightarrow{ء}$ = (٠ ، ٢) − (١ ، −٢) = (−١ ، ٤)

∴ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ءج}$ ⇐ الشكل أ ب ج ء متوازى أضلاع

، $\overrightarrow{بج}$ = $\overrightarrow{ج}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (٠ ، ٢) − (٨ ، ٤) = (−٨ ، −٢)

ميل $\overrightarrow{أب}$ = −٤ ، ميل $\overrightarrow{بج}$ = $\frac{١}{٤}$ ⇐ $\overrightarrow{أب}$ ⊥ $\overrightarrow{بج}$

∴ الشكل أ ب ج ء مستطيل

$\|\overrightarrow{أب}\|$ = $\sqrt{١ + ١٦}$ = $\sqrt{١٧}$ ، $\|\overrightarrow{بج}\|$ = $\sqrt{٦٤ + ٤}$ = $\sqrt{٦٨}$

⇐ مساحة سطح المستطيل = $\sqrt{١٧}$ × $\sqrt{٦٨}$ = ٣٤ وحدة مربعة

• **ملاحظة** (٤) :

لإثبات أن الشكل الرباعى معيّن : نثبت أنه متوازى أضلاع وفيه ضلعان متجاوران متساويان فى الطول .

مثال (٧)

أثبت أن الشكل أ ب ج ء الذى فيه : أ (٣ ، ٤) ، ب (١ ، −١) ، ج (−٤ ، −٣) ، ء (−٢ ، ٢) هو معيّن

الحل

∵ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (١ ، −١) − (٣ ، ٤) = (−٢ ، −٥)

، $\overrightarrow{ءج}$ = $\overrightarrow{ج}$ − $\overrightarrow{ء}$ = (−٤ ، −٣) − (−٢ ، ٢) = (−٢ ، −٥)

∴ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ءج}$ ⇐ الشكل أ ب ج ء متوازى أضلاع

، $\overrightarrow{بج}$ = $\overrightarrow{ج}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (−٤ ، −٣) − (١ ، −١) = (−٥ ، −٢)

$\|\overrightarrow{أب}\|$ = $\sqrt{٤ + ٢٥}$ = $\sqrt{٢٩}$ ، $\|\overrightarrow{بج}\|$ = $\sqrt{٢٥ + ٤}$ = $\sqrt{٢٩}$

⇐ أ ب = ب ج ⇐ الشكل أ ب ج ء معيّن

• **ملاحظة** (٥) :

لإثبات أن الشكل الرباعى مربع : نثبت أنه متوازى أضلاع وفيه ضلعان متجاوران متعامدان ومتساويان فى الطول .

مثال (٨)

أثبت أن النقط : أ (١ ، ٣) ، ب (٦ ، ١) ، ج (٤ ، −٤) ، ء (−١ ، −٢) هى رؤوس مربع ثم أوجد مساحة سطحه .

الحل

∵ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (٦ ، ١) − (١ ، ٣) = (٥ ، −٢)

، $\overrightarrow{ءج}$ = $\overrightarrow{ج}$ − $\overrightarrow{ء}$ = (٤ ، −٤) − (−١ ، −٢) = (٥ ، −٢)

∴ $\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ءج}$ ⇐ الشكل أ ب ج ء متوازى أضلاع

، $\overrightarrow{بج}$ = $\overrightarrow{ج}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (٤ ، −٤) − (٦ ، ١) = (−٢ ، −٥)

ميل $\overrightarrow{أب}$ = − $\frac{٢}{٥}$ ، ميل $\overrightarrow{بج}$ = $\frac{٥}{٢}$ ⇐ $\overrightarrow{أب}$ ⊥ $\overrightarrow{بج}$ لأن :

$م_١ × م_٢$ = −١ ∴ الشكل أ ب ج ء مستطيل

$\|\overrightarrow{أب}\|$ = $\sqrt{٢٥ + ٤}$ = $\sqrt{٢٩}$ ، $\|\overrightarrow{بج}\|$ = $\sqrt{٤ + ٢٥}$ = $\sqrt{٢٩}$

∴ أ ب = ب ج ∴ الشكل أ ب ج ء مربع

⇐ مساحة سطح المربع = $\sqrt{٢٩}$ × $\sqrt{٢٩}$ = ٢٩ وحدة مربعة

• **ملاحظة** (٦) :

لإثبات أن المثلث أ ب ج قائم الزاوية فى ب :

نثبت أن $\overrightarrow{بأ}$ ⊥ $\overrightarrow{بج}$

مثال (٩)

إذا كان : أ (٦ ، ٠) ، ب (٢ ، −٤) ، ج (−٤ ، ٢) فأثبت أن △ أ ب ج قائم الزاوية فى ب .

الحل

$\overrightarrow{أب}$ = $\overrightarrow{ب}$ − $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، −٤) − (٦ ، ٠) = (−٤ ، −٤)

$\overrightarrow{بج}$ = $\overrightarrow{ج}$ − $\overrightarrow{ب}$ = (−٤ ، ٢) − (٢ ، −٤) = (−٦ ، ٦)

ميل $\overrightarrow{أب}$ = $م_١$ = ١ ، ميل $\overrightarrow{بج}$ = $م_٢$ = −١

∴ $\overrightarrow{أب}$ ⊥ $\overrightarrow{بج}$ لأن $م_١ × م_٢$ = −١

⇐ △ أ ب ج قائم الزاوية فى ب .

مثال (١٠)

إذا كان : ٢ $\overrightarrow{ن}$ + ٣ $\overrightarrow{أب}$ = ٢ $\overrightarrow{جب}$ − $\overrightarrow{بأ}$ فأثبت أن $\overrightarrow{ن}$ = $\overrightarrow{جأ}$

الحل

٢ $\overrightarrow{ن}$ = ٢ $\overrightarrow{جب}$ − $\overrightarrow{بأ}$ − ٣ $\overrightarrow{أب}$ = ٢ $\overrightarrow{جب}$ − $\overrightarrow{بأ}$ + ٣ $\overrightarrow{بأ}$

= ٢ $\overrightarrow{جب}$ + ٢ $\overrightarrow{بأ}$ = ٢ ($\overrightarrow{جب}$ + $\overrightarrow{بأ}$)

∴ ٢ $\overrightarrow{ن}$ = ٢ $\overrightarrow{جأ}$ ⇐ $\overrightarrow{ن}$ = $\overrightarrow{جأ}$

مثال (١١)

إذا كانت : أ (٨ ، ٢) ، ب (٣ ، −١) ، ج (٠ ، ٤) هى رؤوس متوازى أضلاع فأوجد باستخدام المتجهات إحداثي النقطة ء .

الحل

∵ أ ب ج ء متوازى أضلاع ∴ $\overrightarrow{ءج}$ = $\overrightarrow{أب}$

∴ $\overleftarrow{د} - \overleftarrow{ج} = \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب}$ ⇐ $\overleftarrow{د} = \overleftarrow{أ} - \overleftarrow{ب} + \overleftarrow{ج}$

⇐ $\overleftarrow{د}$ = (٨ ، ٢) − (٣ ، −١) + (٠ ، ٤) = (٥ ، ٧)

مثال (١٢)

أ ب ج د متوازى أضلاع فيه : أ(س ، ٤) ، ب(١ ، −١)
، ج(−٤ ، −٣) ، د(٢ ، ص) أوجد قيم س ، ص

الحل

∵ الشكل أ ب ج د متوازى أضلاع ∴ $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{دج}$

∵ $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ}$ = (١ ، −١) − (س ، ٤) = (١ − س ، −٥)

، $\overleftarrow{دج} = \overleftarrow{ج} - \overleftarrow{د}$ = (−٤ ، −٣) − (٢ ، ص)

= (−٦ ، −٣ − ص)

$\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{دج}$ ⇐ (١ − س ، −٥) = (−٦ ، −٣ − ص)

∴ ١ − س = −٦ ⇐ س = ٧

، −٥ = −٣ − ص ⇐ ص = ٢

• **ملاحظات هامة** :

(١) محصلة عدة قوى $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣}$ + ...

(٢) إذا أثرت قوتان على جسم وكانتا متساويتان فى المقدار ولهما نفس خط العمل وفى اتجاهين متضادين فإن القوة المحصلة $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{٠}$

(٣) إذا كانت محصلة عدة قوى متلاقية فى نقطة واحدة = $\overleftarrow{٠}$ فإن مجموعة هذه القوى تكون متزنة

مثال (١٣)

إذا أثرت القوى : $\overleftarrow{ق_١}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = $\overleftarrow{س}$ + ٦ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ = −٥ $\overleftarrow{ص}$ فى نقطة مادية . احسب مقدار واتجاه محصلة هذه القوى حيث أن القوى مقاسة بالنيوتن .

الحل

∵ $\overleftarrow{ق} = \overleftarrow{ق_١} + \overleftarrow{ق_٢} + \overleftarrow{ق_٣}$ = (٢ + ١) $\overleftarrow{س}$ + (٣ + ٦ − ٥) $\overleftarrow{ص}$

∴ $\overleftarrow{ق}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$

مقدار المحصلة = $\|\overleftarrow{ق}\|$ = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$ = ٥ نيوتن

اتجاه المحصلة θ = ظا$^{-١}$ ($\frac{٤}{٣}$) = ٥٣° ٨′

• **السرعة النسبية**:

السرعة النسبية لجسم (ب) بالنسبة إلى جسم آخر (أ) = $\overleftarrow{ع_{بأ}}$

، $\overleftarrow{ع_{بأ}} = \overleftarrow{ع_ب} - \overleftarrow{ع_أ}$ حيث : $\overleftarrow{ع_أ}$ السرعة الفعلية للجسم أ

، $\overleftarrow{ع_ب}$ السرعة الفعلية للجسم ب

مثال (١٤)

تتحرك سيارة على طريق مستقيم بسرعة ٩٠ كم / س . إذا تحركت دراجة بخارية (موتوسيكل) بسرعة ٤٠ كم / س على نفس الطريق . فأوجد سرعة الدراجة البخارية بالنسبة للسيارة عندما :

أ) السيارة والدراجة يتحركان فى نفس الاتجاه .

ب) السيارة والدراجة تتحركان فى اتجاهين متضادين .

الحل

باعتبار $\overleftarrow{ى}$ الاتجاه الموجب فى نفس اتجاه السيارة

أ) السرعة الفعلية للسيارة = $\overleftarrow{ع_م}$ = ٩٠ $\overleftarrow{ى}$

السرعة الفعلية للدراجة = $\overleftarrow{ع_ب}$ = ٤٠ $\overleftarrow{ى}$

⇐ $\overleftarrow{ع_{بم}} = \overleftarrow{ع_ب} - \overleftarrow{ع_م}$ = ٤٠ $\overleftarrow{ى}$ − ٩٠ $\overleftarrow{ى}$ = −٥٠ $\overleftarrow{ى}$

∴ راكب السيارة يشعر أن الدراجة تتحرك نحوه بسرعة ٥٠ كم / س

ب) السرعة الفعلية للسيارة = $\overleftarrow{ع_م}$ = ٩٠ $\overleftarrow{ى}$

السرعة الفعلية للدراجة = $\overleftarrow{ع_ب}$ = −٤٠ $\overleftarrow{ى}$

⇐ $\overleftarrow{ع_{بم}} = \overleftarrow{ع_ب} - \overleftarrow{ع_م}$ = −٤٠ $\overleftarrow{ى}$ − (٩٠ $\overleftarrow{ى}$) = −١٣٠ $\overleftarrow{ى}$

∴ راكب السيارة يشعر أن الدراجة تتحرك نحوه بسرعة ١٣٠ كم / س

تمارين (٧)

(١) إذا أثرت القوى : $\overleftarrow{ق_١}$ = (٠ ، ٦) ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ١٣ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٣}$ = ٢ $\overleftarrow{س}$ − ٧ $\overleftarrow{ص}$ فى نقطة مادية ومقاسة بالداين .
أوجد مقدار محصلة هذه القوى واتجاهها .

(٢) أكمل :

أ) إذا كانت : $\overleftarrow{ع_م}$ = ٧٠ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع_ب}$ = ٩٠ $\overleftarrow{ى}$ فإن : $\overleftarrow{ع_{بم}}$ = ...

ب) إذا كانت : $\overleftarrow{ع_م}$ = ٧٠ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع_ب}$ = ٩٠ $\overleftarrow{ى}$ فإن : $\overleftarrow{ع_{مب}}$ = ...

ج) إذا كانت $\overleftarrow{ع_{مب}}$ = −٢٠ $\overleftarrow{ى}$ ، $\overleftarrow{ع_م}$ = −٩٠ $\overleftarrow{ى}$ فإن : $\overleftarrow{ع_ب}$ = ...

(٣) تتحرك سيارتان أ ، ب على طريق مستقيم ، الأولى بسرعة ١٤٠ كم / س ، والثانية بسرعة ١١٠ كم / س فى الاتجاه المضاد لحركة السيارة أ . أوجد سرعة السيارة ب بالنسبة للسيارة أ

(٤) إذا كانت القوى :
$\overleftarrow{ق_١}$ = ٧ $\overleftarrow{س}$ − ٥ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ق_٢}$ = أ $\overleftarrow{س}$ + ٣ $\overleftarrow{ص}$ ،
$\overleftarrow{ق_٣}$ = −٤ $\overleftarrow{س}$ + (ب − ٣) $\overleftarrow{ص}$ تؤثر فى نقطة مادية فأوجد قيمتى : أ ، ب إذا كانت :
(أولاً) : محصلة مجموعة القوى تساوى : ٤ $\overleftarrow{س}$ − ٧ $\overleftarrow{ص}$
(ثانياً) : مجموعة القوى متزنة .

(٥) أكمل :

ⓐ إذا كان $\overrightarrow{أ} = ٢\,\overrightarrow{س} - ٣\,\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ب} = ٦\,\overrightarrow{س} + \overrightarrow{ص}$ فإن :

$\overrightarrow{ب} - ٢\,\overrightarrow{أ} =$ ....

ⓑ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ (−٣ ، ٦) ، ب (٧ ، ٧ك) ، $\overrightarrow{أ} \,/\!/\, \overrightarrow{ب}$ فإن ك = ...

ⓒ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ١) ، $\overrightarrow{أب}$ = (٦ ، ٦) فإن $\overrightarrow{ب}$ = ...

ⓓ إذا كان أ (٣ ، ٨) ، ب(−٣ ، ٠) فإن $\|\overrightarrow{أب}\|$ = ...

(٦) إذا كان أ (٢ ، ٢) ، ب(٤ ، −٢) ، ج(−٢ ، ٠) ، ء(١ ، ك)

وكان $\overrightarrow{أء} \perp \overrightarrow{بج}$ فأوجد قيمة ك .

(٧) أ ب ج ∆ : ء ∈ $\overline{بج}$ بحيث ٣ $\overrightarrow{بء}$ = ٥ $\overrightarrow{ءج}$

أثبت أن : ٥ $\overrightarrow{أج}$ + ٣ $\overrightarrow{أب}$ = ٨ $\overrightarrow{أء}$

(٨) أ ب ج ء مستطيل : أ (−١ ، −٢) ، ب(٥ ، ١) ، ج(٣ ، ك)

أوجد : ① قيمة ك   ② إحداثي نقطة ء

الوحدة الرابعة : الهندسة التحليلية

١ – تقسيم قطعة مستقيمة

✪ أولاً : التقسيم من الداخل :

إذا كانت ج تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة $ل_٢ : ل_١$ فإن :

$\overrightarrow{ج} = \frac{ل_١ \overrightarrow{ر_٢} + ل_٢ \overrightarrow{ر_١}}{ل_١ + ل_٢}$ (تسمى الصورة المتجهة)

، ج = $\left(\frac{ل_١ س_٢ + ل_٢ س_١}{ل_١ + ل_٢} ، \frac{ل_١ ص_٢ + ل_٢ ص_١}{ل_١ + ل_٢} \right)$

(تسمى الصورة الإحداثية أو الصورة الكارتيزية)

• **أنتبه** : نسبة التقسيم هى $\frac{ل_٢}{ل_١}$ وليست $\frac{ل_١}{ل_٢}$

مثال (١)

إذا كانت : أ (٤ ، ٢) ، ب(٨ ، −٦) فأوجد إحداثي النقطة ج

التي تقسم $\overline{أب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٣

الحل

$ل_٢ : ل_١$ = ١ : ٣ ⇐ $ل_٢$ = ١ ، $ل_١$ = ٣ (تسمى نسبة التقسيم)

∴ $\overrightarrow{ج} = \frac{٣ \times (٤ ، ٢) + ١ \times (٨ ، -٦)}{٣ + ١} = \frac{(٢٠ ، ٠)}{٤} = (٥ ، ٠)$

حل آخر :

ج = $\left(\frac{٣ \times ٤ + ١ \times ٨}{٣ + ١} ، \frac{٣ \times ٢ + ١ \times -٦}{٣ + ١} \right) = \left(\frac{٢٠}{٤} ، ٠ \right) = (٥ ، ٠)$

✪ ثانياً : التقسيم من الخارج :

إذا كانت ج تقسم $\overline{أب}$ من الخارج بنسبة $ل_٢ : ل_١$

فإننا نضع إشارة سالبة على إحدى حدى نسبة التقسيم ونكمل

مثال (٢)

إذا كان أ = (١ ، ٢) ، ب = (٨ ، −٥) فأوجد إحداثي النقطة ج

التي تقسم $\overline{أب}$:

ⓐ بنسبة ٤ : ٣ من الداخل

ⓑ بنسبة ٤ : ٣ من الخارج

الحل

ⓐ التقسيم من الداخل :

$ل_٢$ = ٤ ، $ل_١$ = ٣ ، $\overrightarrow{ر_١}$ = (١ ، ٢) ، $\overrightarrow{ر_٢}$ = (٨ ، −٥)

$\overrightarrow{ج} = \frac{٣(١ ، ٢) + ٤(٨ ، -٥)}{٣ + ٤} = \frac{(٣٥ ، -١٤)}{٧} = (٥ ، -٢)$

ⓑ $ل_٢$ = ٤ ، $ل_١$ = −٣ ، $\overrightarrow{ر_١}$ = (١ ، ٢) ، $\overrightarrow{ر_٢}$ = (٨ ، −٥)

$\overrightarrow{ج} = \frac{-٣(١ ، ٢) + ٤(٨ ، -٥)}{-٣ + ٤} = \frac{(٢٩ ، -٢٦)}{١} = (٢٩ ، -٢٦)$

تدريب

إذا كان أ = (٣ ، −٢) ، ب = (−١ ، ٥) فأوجد إحداثي النقطة ج

التي تقسم $\overline{أب}$ بنسبة ٢ : ٣ عندما يكون :

ⓐ التقسيم من الداخل   ⓑ التقسيم من الخارج

الحل

ⓐ التقسيم من الداخل

$ل_٢$ = ... ، $ل_١$ = ... ، $\overrightarrow{ر_١}$ = (..... ، .....) ، $\overrightarrow{ر_٢}$ = (..... ، .....)

$\overrightarrow{ج}$ = ...

....

ⓑ التقسيم من الخارج

$ل_٢$ = ... ، $ل_١$ = ... ، $\overrightarrow{ر_١}$ = (..... ، .....) ، $\overrightarrow{ر_٢}$ = (..... ، .....)

$\overrightarrow{ج}$ = ...

....

• **ملاحظة هامة :**

إذا كانت ج تنصف $\overline{أب}$ فإن : $ل_١ = ل_٢ = ل$

$\overrightarrow{ج} = \frac{\overrightarrow{ر_١} + \overrightarrow{ر_٢}}{٢}$ (تسمى الصورة المتجهة)   ج = $\frac{أ + ب}{٢}$

، ج = $\left(\frac{س_١ + س_٢}{٢} ، \frac{ص_١ + ص_٢}{٢} \right)$

(تسمى الصورة الإحداثية أو الصورة الكارتيزية)

مثال (٣)

إذا كان جـ (٢ ، ٤) منتصف أب حيث أ (س ، ٤) ، ب (١ ، ص) ، أوجد قيمة كلاً من س ، ص .

الحل

∵ جـ منتصف أب ∴ $(٢ ، ٤) = \frac{(س ، ٤) + (١ ، ص)}{٢}$

⇐ ٢ (٢ ، ٤) = (س + ١ ، ٤ + ص)

⇐ (٤ ، ٨) = (س + ١ ، ٤ + ص)

∴ س + ١ = ٤ ⇐ س = ٣ ، ٤ + ص = ٨ ⇐ ص = ٤

تدريب

إذا كان أ (٢ ، ٠) ، ب (−٤ ، ٤) فأوجد إحداثي النقطة جـ التى تنصف أب .

الحل

....

مثال (٤)

إذا كان: أ (١ ، ٢) ، ب (٨ ، −٥) ، جـ (٢٩ ، −٢٦) فأوجد النسبة التى تقسم بها النقطة جـ القطعة أب .

الحل

بفرض نسبة التقسيم = $ل_1 : ل_2$

∴ $(٢٩ ، −٢٦) = \frac{ل_1 (١ ، ٢) + ل_2 (٨ ، −٥)}{ل_1 + ل_2}$

∴ $\frac{ل_1 + ٨ ل_2}{ل_1 + ل_2} = ٢٩$ ⇐ $ل_1 + ٨ ل_2 = ٢٩ ل_1 + ٢٩ ل_2$

⇐ $ل_1 − ٢٩ ل_1 = ٢٩ ل_2 − ٨ ل_2$ ⇐ $−٢٨ ل_1 = ٢١ ل_2$

∴ $\frac{ل_2}{ل_1} = −\frac{٢٨}{٢١} = −\frac{٤}{٣}$

∴ جـ تقسم أب من الخارج بنسبة ٤ : ٣

تدريب

إذا كان: أ (١ ، ٢) ، ب (٨ ، −٥) ، جـ (٥ ، −٢) فأوجد النسبة التى تقسم بها النقطة جـ القطعة أب .

الحل

....

....

....

....

....

مثال (٥)

إذا كان : أ (٢ ، ٣) ، ب (−٢ ، ١) أوجد النسبة التى تنقسم بها أب بنقطة تقاطعها مع محور السينات ثم أوجد إحداثي نقطة التقسيم .

الحل

نفرض أن جـ (س ، ٠) هى نقطة تقاطع أب مع محور السينات

∴ $٠ = \frac{ل_1 × ٣ + ل_2 × ١}{ل_1 + ل_2}$ ⇐ $٣ ل_1 + ل_2 = ٠$

⇐ $ل_2 = −٣ ل_1$ ⇐ $\frac{ل_2}{ل_1} = ٣ : −١$

∴ جـ تقسم أب من الخارج بنسبة ٣ : ١

⇐ $س = \frac{−١ × ٢ + ٣ × −٢}{٣ − ١} = −٤$ ⇐ جـ = (−٤ ، ٠)

مثال (٦)

أثبت أن النقط : أ (١ ، ٤) ، ب (٣ ، −٢) ، جـ (−٣ ، ١٦) تقع على استقامة واحدة .

الحل

أب = ب − أ = (٣ ، −٢) − (١ ، ٤) = (٢ ، −٦) = ٢ (١ ، −٣)

، أجـ = جـ − أ = (−٣ ، ١٦) − (١ ، ٤) = (−٤ ، ١٢)

= −٤ (١ ، −٣)

∴ أجـ = −٢ أب ⇐ أ ، ب ، جـ تقع على استقامة واحدة

، ب ، جـ فى جهتين مختلفتين من أ .

تمارين (٨)

(١) أكمل مايأتى :

(أ) إذا كانت نسبة التقسيم سالبة فإن ....

(ب) إذا كانت نسبة التقسيم موجبة فإن ....

(جـ) إذا كان أ (٢ ، −٥) ، ب (٦ ، ٣) فإن منتصف أب = (....... ، ....)

(د) إذا كانت أ (−٣ ، ٧) ، جـ (٣ ، ٦) ، وكانت جـ تنصف أب فإن إحداثي ب = (....... ، ....)

(٢) إذا كانت أ = (٢ ، ٥) ، ب = (٧ ، −١) ، أوجد :

(أ) إحداثي جـ التى تقسم أب بنسبة ٣ : ٢ من الخارج

(ب) إحداثي ء التى تقسم أب بنسبة ٤ : ٣ من الداخل

(٣) أثبت أن النقط : أ (٢ ، ٥) ، ب (٥ ، ٢) ، جـ (٤ ، ٣) تقع على استقامة واحدة ثم أوجد النسبة التى تقسم بها جـ القطعة المستقيمة أب مبيناً نوع التقسيم

(٤) إذا كانت أ (٨ ، −٤) ، (−١ ، ٢) فأوجد إحداثي النقطتين اللتين تقسمان أب إلى ثلاثة أجزاء متساوية فى الطول .

٢ – معادلة الخط المستقيم

✪ تذكر أن :

أولاً : الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هى :

أ س + ب ص + جـ = ٠ ، ميل هذا المستقيم = م = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$

ثانياً : ميل الخط المستقيم :

(١) إذا كان المستقيم يمر بنقطتين معلومتين فإن :

م = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

(٢) إذا كان المستقيم معادلة على الصورة ص = م س + جـ
فإن ميله = م

(٣) إذا عُلم قياس الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات (هـ° مثلاً) فإن ميله = م = ظا هـ

(٤) ميل محور السينات أو أى مستقيم يوازيه = صفر

(٥) ميل محور الصادات أو أى مستقيم يوازيه غير معرف

● ملاحظة هامة :

إذا كان $\overleftarrow{ى}$ = (أ ، ب) متجه اتجاه لمستقيم ما فإن ميل هذا المستقيم : م = $\frac{ب}{أ}$

✪ الصور المختلفة لمعادلة الخط المستقيم :

(١) المعادلة المتجهة هى : $\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{ا} + ك \overleftarrow{ى}$

حيث $\overleftarrow{ا}$ نقطة تقع على المستقيم ، $\overleftarrow{ى}$ متجه اتجاه للمستقيم

⇐ (س ، ص) = ($س_١$ ، $ص_١$) + ك (أ ، ب)

(٢) المعادلات البارامترية هى :

س = $س_١$ + ك أ ، ص = $ص_١$ + ك ب

(ويسميان هاتان المعادلتان ايضاً : المعادلتان الوسيطتان)

(٣) المعادلة الكارتيزية هى :

ⓐ بمعلومية الميل ونقطة معلومة :

(ص – $ص_١$) = م (س – $س_١$)

ⓑ بمعلومية الميل وطول الجزء المقطوع من محور الصادات :

ص = م س + جـ

ⓒ بمعلومية طولى الجزءين المقطوعين أ ، ب من المحورين :

$\frac{س}{أ} + \frac{ص}{ب} = ١$

(٤) متجه اتجاه العمودى للمستقيم :

إذا كان (أ ، ب) متجه اتجاه للمستقيم فإن : ك (ب ، – أ) أ، ك (– ب ، أ) هم عائلة متجهات العمودى على المستقيم

مثال (١)

اكتب المعادلة المتجهة للمستقيم الذى يمر بالنقطة (– ٤ ، ٣) ومتجه الاتجاه له (٢ ، ٥) .

الحل

المعادلة المتجهة للمستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (– ٤ ، ٣) + ك (٢ ، ٥)

مثال (٢)

اكتب المعادلتين البارامترين للمستقيم الذى يمر بالنقطة (٠ ، ٥) ومتجه الاتجاه له هو (– ١ ، ٤) .

الحل

المعادلة المتجهة للمستقيم : $\overleftarrow{ر}$ = (٠ ، ٥) + ك (– ١ ، ٤)

⇐ س = – ك ، ص = ٥ + ٤ ك (المعادلتان البارامتريان)

مثال (٣)

أوجد المعادلة الكارتيزية للخط المستقيم المار بالنقطة (٣ ، – ٤) ويصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

الحل

م = ظا ٤٥ = ١ ⇐ المعادلة الكارتيزية هى : ص + ٤ = ١ (س – ٣)

أى : س – ص – ٧ = ٠ (وهى المعادلة العامة للمستقيم)

تدريب

أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم المار بالنقطة (٣ ، ٠) وميله = $\frac{١}{٤}$

الحل :

∵ ميل المستقيم = $\frac{١}{٤}$ ∴ متجه الاتجاه = (٤ ، ١)

المعادلة المتجهة هى : ....

المعادلتان الوسيطتان هما : ....

....

المعادلة الكارتيزية هى : ....

....

....

مثال (٤)

إذا كان $\overleftarrow{ى}$ = (١ ، $\frac{٢}{٣}$) متجه اتجاه للمستقيم فإن جميع المتجهات التالية عمودياً على المستقيم عدا المتجه :

(– $\frac{٢}{٣}$ ، ١) ، (٢ ، – ٣) ، (– ١ ، $\frac{٢}{٣}$) ، (٤ ، – ٦) ، (– ٤ ، ٦)

الجواب : كلهم ماعدا المتجه (– ١ ، $\frac{٢}{٣}$)

مثال (٥)

إذا كان المستقيم المار بالنقطة ٩(٢ ، –٣) ⊥ المتجه (–١ ، ٢) فأوجد :

ⓐ المعادلة المتجهة   ⓑ المعادلتين البارامتريين

ⓒ المعادلة العامة .

الحل

متجه اتجاه المستقيم هو : ى = (٢ ، ١)

المعادلة المتجهة : ر = (٢ ، –٣) + ك (٢ ، ١)

المعادلتان البارامتريان : س = ٢ + ٢ ك   ،   ص = –٣ + ك

المعادلة الكارتيزية : ص – ص$_1$ = م (س – س$_1$)

⇐ ص + ٣ = $\frac{١}{٢}$ (س – ٢)   ⇐ ٢ ص + ٦ = س – ٢

⇐ س – ٢ ص – ٨ = ٠ (المعادلة العامة)

مثال (٦)

اكتب معادلة المستقيم الذى فيه (٣ ، ٢) متجه العمودى عليه ويقطع جزءاً طولة ٥ وحدات من محور الصادات فى الاتجاه السالب .

الحل :

متجه اتجاه المستقيم = (٢ ، –٣) ⇐ م = –$\frac{٣}{٢}$

حيث جـ = –٥   ∴ معادلة المستقيم هى : ص = –$\frac{٣}{٢}$ س – ٥

أى : ٢ ص = –٣ س – ٥   ⇐ ٣ س + ٢ ص + ٥ = ٠

تدريب

اكتب معادلة المستقيم الذى فيه (–١ ، ٤) متجه اتجاهه ، ويقطع جزءاً طولة ٥ وحدات من الاتجاه الموجب لمحور الصادات .

الحل

م = ... ، جـ = ...

معادلة المستقيم هى : ص = م س + جـ

أى ....

مثال (٧)

أوجد طولى الجزأين المقطوعين من المحورين بالمستقيم :

٢ س – ٣ ص = ١٢

الحل

بالقسمة على ١٢ : $\frac{س}{٦}$ + $\frac{ص}{٤}$ = ١

∴ طولا الجزأين المقطوعين من المحورين السينى والصادى هما ٦ ، ٤ وحدات على الترتيب .

مثال (٨)

أثبت أن المستقيمين : س – ٤ ص + ١٤ = ٠ ، ٤ س + ص + ٥ = ٠ متعامدان ثم أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة التقاطع والنقطة (٢ ، ١)

الحل

م$_1$ = $\frac{١}{٤}$ ، م$_2$ = –٤ ⇐ م$_1$ × م$_2$ = $\frac{١}{٤}$ × –٤ = –١ ⇐ المستقيمان متعامدان

س – ٤ ص + ١٤ = ٠ .... (١) ، ٤ س + ص + ٥ = ٠ .... (٢)

من (١) : س = ٤ ص – ١٤ .... (٣) ثم نعوض فى (٢)

⇐ ٤ (٤ ص – ١٤) + ص + ٥ = ٠ ⇐ ١٦ ص – ٥٦ + ص + ٥ = ٠

∴ ١٧ ص = ٥١ ⇐ ص = ٣ ونعوض فى (٣) ⇐ س = –٢

∴ نقطة تقاطع المستقيمان هى (–٢ ، ٣)

∵ معادلة المستقيم المار بالنقطتين : (٢ ، ١) ، (–٢ ، ٣) :

ميل المستقيم = م = $\frac{٣ - ١}{-٢ - ٢}$ = –$\frac{١}{٢}$

∴ المعادلة هى : ص – ص$_1$ = م (س – س$_1$)

أى : ص – ١ = –$\frac{١}{٢}$ (س – ٢) ⇐ –٢ ص + ٢ = س – ٢

أى : س + ٢ ص – ٤ = ٠

تمارين (٩)

(١) أكمل مايأتى :

ⓐ المستقيم الذى يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يكون ميله = ... ، ومتجه اتجاهه = (...... ، ......) ، وميل العمودى عليه = ...

ⓑ المستقيم الذى معادلته : ر = (٣ ، ٢) + ك (٢ ، –٥) فإن ميله = ... ، ومتجه اتجاهه = (...... ، ......) ، ومتجه اتجاه العمودى عليه = (...... ، ......)

ⓒ شرط توازى مستقيمين ميلاهما م$_1$ ، م$_2$ هو .... ، وشرط تعامدهما هو ....

ⓓ المستقيم : س = ٣ + ٢ ك ، ص = ٢ – ٥ ك يمر بالنقطة (....... ، ....) ، ومتجه اتجاهه هو (...... ، ....)

ⓗ إذا كانت النقط : (٤ ، ١) ، (٢ ، ص) ، (٧ ، ٧) تقع على استقامة واحدة فأوجد قيمة ص .

ⓦ إذا كان ميل المستقيم (٥٩ – ١) س + ٣٩ ص + ٧ = ٠ يساوى ٢ فأوجد قيمة ٩ .

(٢) أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى :

Ⓐ يمر بالنقطتين (٣ ، ٠) ، (٠ ، –٥)

Ⓑ يمر بالنقطة (٢ ، ١) وميله = $-\frac{٣}{٢}$

Ⓒ يمر بالنقطة (٢ ، –١) ومتجه اتجاهه هو (–١ ، ٢)

Ⓓ يمر بنقطة تقاطع المستقيمين :

٢ س + ص – ٧ = ٠ ، ٣ س – ٢ ص = ٠ وميله = – ٨

٣ – قياس الزاوية بين مستقيمين

إذا كانت هـ هى قياس الزاوية بين المستقيمين ل$_١$ ، ل$_٢$ اللذين

ميلاهما : م$_١$ ، م$_٢$ فإن : $\boxed{ظا هـ = \left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right|}$

حيث : م$_١$ م$_٢$ ≠ –١ ، هـ زاوية حادة

• **ملحوظة** :

	إشارتها	نوع الزاوية	حالة المستقيمان
ظا هـ	موجب	∠ هـ حادة	متقاطعان
	صفر	ق($\hat{هـ}$) = ٠°	متوازيان
	غير معرّف	ق($\hat{هـ}$) = ٩٠°	متعامدان

مثال (١)

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

$\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، –٢) + ك (٣ ، –١) ، ٢ س – ص + ٥ = ٠

الحل

ميل المستقيم الأول = م$_١$ = $-\frac{١}{٣}$ ، ميل المستقيم الثانى = م$_٢$ = ٢

∵ ظا هـ = $\left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right| = \left|\frac{-\frac{١}{٣} - ٢}{١ - \frac{١}{٣} \times ٢}\right|$ = ٧

∴ ق($\hat{هـ}$) = ظا$^{-١}$ ٧ = ٨١° ٥٢َ

• **ملحوظة** : إذا عُلم أن أحد المستقيمين ميله = صفر فإن

ظا هـ = القيمة المطلقة لميل المستقيم الآخر .

مثال (٢)

أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :

٢ ص = ٣ ، ٣ س + ص = ٥

الحل

ميل المستقيم الأول = م$_١$ = ٠ ، ميل المستقيم الثانى = م$_٢$ = – ٣

ظا هـ = $\left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right| = \left|\frac{٠ - ٣}{١ + ٠ \times ٣}\right|$ = ٣ (أو ظا هـ = | –٣ | = ٣)

⇐ ق($\hat{هـ}$) = ظا$^{-١}$ ٣ = ٧١° ٣٤َ

تدريب

أوجد قياس الزاوية الحادة المحصورة بين المستقيمين :

$\overrightarrow{ر_١}$ = (٧ ، ٠) + ك (٢ ، –١) ، $\overrightarrow{ر_٢}$ = (–٦ ، ٢) + ك (٢ ، ١)

الحل

ميل المستقيم الأول م$_١$ = ... ، ميل المستقيم الثانى م$_٢$ = ...

∵ ظا هـ = ... = ...

∴ ق($\hat{هـ}$) = ...

• **ملحوظة** : عند استخدام قانون الزاوية بين مستقيمين لإيجاد قياس زاوية داخلة لمثلث يجب أولاً تحديد نوع الزاوية (حادة – قائمة – منفرجة) .

✪ لتعيين نوع المثلث حسب زواياه :

(١) إذا كان مربع أكبر ضلع > مجموع مربعى الضلعين الآخرين فإن المثلث منفرج الزاوية المقابلة للضلع الأكبر

(٢) إذا كان مربع أكبر ضلع = مجموع مربعى الضلعين الآخرين فإن المثلث قائم الزاوية المقابلة للضلع الأكبر

(٢) إذا كان مربع أكبر ضلع < مجموع مربعى الضلعين الآخرين فإن المثلث حاد الزوايا

مثال (٣)

أ ب جـ △ فيه : أ (٠ ، ٢) ، ب (٣ ، ١) ، جـ (–٢ ، –١) . أوجد قياس ∠ أ ثم أوجد مساحة سطح المثلث لأقرب رقمين عشريين .

الحل

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (٣ ، ١) – (٠ ، ٢) = (٣ ، –١)

$\|\overrightarrow{أب}\|^٢$ = ٩ + ١ = ١٠

، $\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب}$ = (–٢ ، –١) – (٣ ، ١) = (–٥ ، –٢)

$\|\overrightarrow{بجـ}\|^٢$ = ٢٥ + ٤ = ٢٩

، $\overrightarrow{أجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{أ}$ = (–٢ ، –١) – (٠ ، ٢) = (–٢ ، –٣)

$\|\overrightarrow{أجـ}\|^٢$ = ٤ + ٩ = ١٣

∵ $\|\overrightarrow{بجـ}\|^٢ > \|\overrightarrow{أب}\|^٢ + \|\overrightarrow{أجـ}\|^٢$ ⇐ ∠ أ زاوية منفرجة

ميل $\overleftrightarrow{أب}$ = م$_١$ = $-\frac{١}{٣}$ ، ميل $\overleftrightarrow{أجـ}$ = م$_٢$ = $\frac{٣}{٢}$

ظا أ = $\left|\frac{م_١ - م_٢}{١ + م_١ م_٢}\right| = \left|\frac{\frac{-١}{٣} - \frac{٣}{٢}}{١ + \frac{-١}{٣} \times \frac{٣}{٢}}\right| = \frac{١١}{٣}$ ⇐ ق($\hat{أ}$) = ١٠٥° ١٥َ

لاحظ إننا طرحنا الزاوية التى ظهرت على الشاشة من ١٨٠° وذلك للحصول على الزاوية المنفرجة .

SHIFT tan 11 ÷ 3 = 180 – Ans = °‚‚‚

مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٢ ب × ٢ جـ × جا ٢

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٣ × جا ١٥َ ١٠٥ْ = ٦٢,٧٩

تدريب

٢ ب جـ △ فيه : ٢ = (−٣ ، −١٣) ، ب = (٥ ، ٣) ، جـ = (−٣ ، ٢) ، نصفت $\overline{٢ب}$ فى ء أوجد قياس الزاوية الحادة بين $\overleftrightarrow{جـء}$ ، $\overleftrightarrow{٢ب}$.

الحل

∵ ء منتصف $\overline{ب جـ}$ ∴ ء = $\frac{٢ + ب}{٢}$ = ...

⇐ ء = (.... ، −٥)

∴ ميل $\overleftrightarrow{جـء}$ = $م_١$ = $\frac{−٥ − ٢}{١ − (−٣)}$ = ...

، ميل $\overleftrightarrow{٢ب}$ = $م_٢$ = ... = ...

ظاهـ = ... ⇐ ق(هـ) = ...

مثال (٤)

إذا كان قياس الزاوية بين المستقيمين : $\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، ١) + ك (٥ ، ٣) ، ٢ س − ص = ٤ يساوى ٤٥ْ فأوجد قيمة ٢ .

الحل

$م_١ = \frac{٣}{٥}$ ، $م_٢$ = ٢ ، هـ = ٤٥ْ

∴ ظا ٤٥ْ = $\left|\frac{م_٢ − م_١}{١ + م_١ م_٢}\right|$ ⇐ ١ = $\left|\frac{\frac{٣}{٥} − ٢}{١ + \frac{٣}{٥}٢}\right|$

∴ $\frac{\frac{٣}{٥} − ٢}{١ + \frac{٣}{٥}٢}$ = ± ١ ⇐ ١ + $\frac{٣}{٥}$ ٢ = ± ($\frac{٣}{٥}$ − ٢)

إما ١ + $\frac{٣}{٥}$ ٢ = $\frac{٣}{٥}$ − ٢ ⇐ $\frac{٣}{٥}$ ٢ + ٢ = $\frac{٣}{٥}$ − ١

⇐ $\frac{٨}{٥}$ ٢ = − $\frac{٢}{٥}$ ⇐ ٢ = − $\frac{١}{٤}$

أو ١ + $\frac{٣}{٥}$ ٢ = − $\frac{٣}{٥}$ + ٢ ⇐ $\frac{٣}{٥}$ ٢ − ٢ = − $\frac{٣}{٥}$ − ١

⇐ − $\frac{٢}{٥}$ ٢ = − $\frac{٨}{٥}$ ⇐ ٢ = ٤

تدريب

إذا كان ظل الزاوية بين المستقيمين :

س + ك ص + ٣ = ٠ ، ص − ٢ س = ٣ يساوى ١ فأوجد قيمة ك .

الحل

....

....

....

....

....

....

٤ – طول العمود المرسوم من نقطة إلى خط مستقيم

• طول العمود (ل) المرسوم من النقطة ($س_١$ ، $ص_١$) إلى الخط المستقيم الذى معادلته : ٢ س + ب ص + جـ = ٠

نحسبة من القانون :

(س١ ، ص١) ، ل ، ٢ س + ب ص + جـ = ٠

طول العمود (ل) = $\frac{|٢ س_١ + ب ص_١ + جـ|}{\sqrt{٢^٢ + ب^٢}}$

مثال (١)

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، ٥) إلى الخط المستقيم : ٣ س + ٤ ص − ٥ = ٠

الحل

طول العمود = $\frac{|٣(٣) + ٤(٥) − ٥|}{\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}}$ = ٤,٨ وحدة طول

تدريب

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٤ ، −٥) إلى الخط المستقيم ٣ س − ٤ ص − ٨ = ٠

الحل

طول العمود = $\frac{|٣(.....) + ٤(.....) − ٥|}{\sqrt{(.....)^٢ + (.....)^٢}}$ = ... وحدة طول

• **ملاحظات** :

(١) طول العمود المرسوم من نقطة الأصل (٠ ، ٠) إلى المستقيم : ٢ س + ب ص + جـ = ٠ يساوى $\frac{|جـ|}{\sqrt{٢^٢ + ب^٢}}$

(٢) إذا كان طول العمود المرسوم من نقطة ما إلى خط مستقيم ما يساوى صفراً فإن النقطة تكون واقعة على المستقيم .

(٣) طول العمود المرسوم على محور السينات = | $ص_١$ |

مثلاً : طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، −٥) إلى محور السينات = | −٥ | = ٥ وحدات طول

(٤) طول العمود المرسوم على محور الصادات = | $س_١$ |

مثلاً : طول العمود المرسوم من النقطة (٣ ، −٥) إلى محور الصادات = | ٣ | = ٣ وحدات طول

(٥) البُعد بين مستقيمين متوازيين هو طول العمود المرسوم من نقطة ∋ أحدهما إلى المستقيم الآخر .

مثال (٢)

أوجد طول العمود المرسوم من نقطة الأصل إلى المستقيم :
٢ ص – ٧ = ٠

الحل

طول العمود = $\frac{|-٧|}{\sqrt{٠ + (٢)^٢}}$ = ٣,٥ وحدة طول

تدريب

أوجد طول العمود المرسوم من النقطة (٢ ، –٥) إلى المستقيم :
$\overrightarrow{ر}$ = (–١ ، ٠) + ك (١٢ ، ٥)

الحل

المستقيم يمر بالنقطة (–١ ، ٠) وميله = $\frac{٥}{١٢}$

⇐ معادلته هى : ص – ٠ = $\frac{٥}{١٢}$ (س + ١)

أى : ٥ س – ١٢ ص + ٥ = ٠

∴ طول العمود = ...

....

مثال (٣)

أثبت أن المستقيمين :
$ل_١$: ٣ س – ٤ ص – ٧ = ٠ ، $ل_٢$: ٣ س – ٤ ص + ١١ = ٠
متوازيان ثم أوجد البعد بينهما .

الحل

$م_١$ = $\frac{٣}{٤}$ ، $م_٢$ = $\frac{٣}{٤}$ ، ∵ $م_١$ = $م_٢$ ∴ المستقيمان متوازيان

بوضع س = ١ فى المستقيم الأول ∴ ٣ × ١ – ٤ ص – ٧ = ٠

∴ – ٤ ص – ٤ = ٠ – ٤ ص = ٤ ⇐ ص = –١

∴ (١ ، –١) ∋ المستقيم الأول ⇐ البعد بين المستقيمين

= طول العمود المرسوم من النقطة (١ ، –١) إلى المستقيم

٣ س – ٤ س + ١١ = ٠ وليكن (ل) حيث :

ل = $\frac{|٣(١) - ٤(-١) + ١١|}{\sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢}}$ = $\frac{١٨}{٥}$ = ٣,٦ وحدة طول

تدريب

إذا كان المستقيمان : $ل_١$: $\overrightarrow{ر}$ = (٠ ، ٢) + ك (٥ ، ٢) ، $ل_٢$:
$\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، –٣) + ك (١٠ ، ٤) متوازيان فأوجد البعد بينهما .

الحل

(..... ، .....) ∋ المستقيم الأول ، المستقيم الثانى معادلته هى :

(س ، ص) – (٢ ، –٣) = ك (١٠ ، ٤) أى : $\frac{س - ٢}{١٠}$ = $\frac{ص + ٣}{٤}$

أى : س – ٢ = ٥ ص + ١٥ أى : س – ٥ ص – ١٧ = ٠

∴ البعد بينهما = طول العمود المرسوم من النقطة (..... ، .....) إلى المستقيم : .... = ٠ وليكن = ل

∴ ل = ... = ... = ...

مثال (٤)

إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (٤ ، ص) على المستقيم
٣ س – ٤ ص = – ٨ يساوى ٨ وحدات طول فأوجد قيمة ص .

الحل

المعادلة العامة للمستقيم هى : ٣ س – ٤ ص + ٨ = ٠

∵ ٨ = $\frac{|٣(٤) - ٤ص + ٨|}{\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}}$ ∴ ٨ = $\frac{|٢٠ - ٤ص|}{٥}$

∴ | ٢٠ – ٤ ص | = ٤٠ ⇐ ٢٠ – ٤ ص = ± ٤٠

إما ٢٠ – ٤ ص = ٤٠ ⇐ ٤ ص = –٢٠ ⇐ ص = –٥

أ، ٢٠ – ٤ ص = –٤٠ ⇐ ٤ ص = ٦٠ ⇐ ص = ١٥

• تحديد موقع نقطتين معلومتين بالنسبة لمستقيم :

أولاً : نعوض بكل نقطة فى المعادلة العامة للمستقيم

ثانياً : نقارن بين إشارتى الناتجين :

(١) إذا كان لهما نفس الإشارة :
كانت النقطتان على جانب واحد من الخط المستقيم .

(٢) إذا إختلفتا فى الإشارة :
كانت النقطتان على جانبين مختلفين من الخط المستقيم .

مثال (٥)

هل النقطتان (٣ ، –٢) ، (–٤ ، ١) تقعان على نفس الجانب من الخط المستقيم : ٣ س + ٢ ص – ١ = ٠ أم على جانبين مختلفين ؟

الحل

النقطة (٣ ، –٢) :

المقدار : ٣ س + ٢ ص – ١ = ٣ (٣) + ٢ (–٢) – ١ = ٤ (موجب)

النقطة (–٤ ، ١) :

المقدار : ٣ س + ٢ ص – ١ = ٣ (–٤) + ٢ (١) – ١ = –١١ (سالب)

∵ إشارتى المقدارين مختلفتين

∴ النقطتان تقعان على جانبين مختلفين من المستقيم .

القناعة كنز لا يفنى

تمارين (١٠)

(١) أوجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين :
٢ س + ٣ ص – ١٥ = ٠ ، ٣ س + ص + ٧ = ٠

(٢) إذا كان طول العمود المرسوم من النقطة (س ، ١) على المستقيم :
٣ س – ٢ ص + ٥ = ٠ يساوى $\sqrt{13}$ وحدة طول فما قيمة س

(٣) أثبت أن النقطتين (– ٢ ، ٣) ، (١ ، ١) تقعان على جانبين مختلفين من الخط المستقيم : $\overrightarrow{ر}$ = (– ١ ، ١) + ك (١ ، ٢)
وعلى بعدين متساويين منه

(٤) إذا كان ظل الزاوية بين المستقيمين : س + ك ص – ٦ = ٠ ، ٢ س + ص – ٣ = ٠ يساوى $\frac{٣}{٤}$ فما قيمة ك

(٥) أوجد قياسات زوايا △ أ ب جـ الذى رؤوسه : أ = (– ٢ ، – ١) ، ب = (٢ ، – ٤) ، جـ = (٤ ، ٧) ثم أوجد مساحته لأقرب وحدة .

(٦) أثبت أن المستقيمين :
$ل_١$: ٢ س – ٥ ص + ١٠ = ٠ ، $ل_٢$: ٥ ص – ٢ س + ١٩ = ٠
متوازيان ثم أوجد البعد بينهما .

٥ – المعادلة العامة للمستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمين

المعادلة التى تمثل جميع المستقيمات المارة بنقطة تقاطع المستقيمين :
$أ_١$ س + $ب_١$ ص + $جـ_١$ = ٠ ، $أ_٢$ س + $ب_٢$ ص + $جـ_٢$ = ٠ هى :

$أ_١$ س + $ب_١$ ص + $جـ_١$ + ك ($أ_٢$ س + $ب_٢$ ص + $جـ_٢$) = ٠

مثال (١)

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة (٢ ، – ١) وبنقطة تقاطع المستقيمين : ٧ س + ص + ٣ = ٠ ، ٥ س – ص – ٣ = ٠

الحل

$أ_١$ س + $ب_١$ ص + $جـ_١$ + ك ($أ_٢$ س + $ب_٢$ ص + $جـ_٢$) = ٠
⇐ ٧ س + ص + ٣ + ك (٥ س – ص – ٣) = ٠ .... (١)
بالتعويض بالنقطة المعلومة (٢ ، – ١)
∴ ٧ (٢) + (– ١) + ٣ + ك [٥ (٢) – (– ١) – ٣] = ٠
∴ ١٦ + ٨ ك = ٠ ⇐ ك = – ٢ وبالتعويض فى (١)
∴ المعادلة المطلوبة هى : ٧ س + ص + ٣ – ٢ (٥ س – ص – ٣) = ٠

أى : ٧ س + ص + ٣ – ١٠ س + ٢ ص + ٦ = ٠
أى : – ٣ س + ٣ ص + ٩ = ٠ أى : س – ص – ٣ = ٠

مثال (٢)

أثبت أن المستقيمين : س – ٤ ص + ١٤ = ٠ ، ٤ س + ص + ٥ = ٠ متعامدان ، ثم أوجد نقطة تقاطعهما ومعادلة المستقيم المار بنقطة التقاطع والنقطة (٢ ، ١) .

الحل

$م_١$ = ... ، $م_٢$ = ... ، $م_١ × م_٢$ = ... = – ١
⇐ المستقيمان متعامدان
وبحل المعادلتين جبرياً نجد أن : س = – ٢ ، ص = ٣
، معادلة المستقيم المار بالنقطتين (– ٢ ، ٣) ، (٢ ، ١) هى :
$\frac{ص - ٣}{س + ٢} = \frac{١ - ٣}{٢ + ٢}$ ⇐ $\frac{ص - ٣}{س + ٢} = \frac{-١}{٢}$ ⇐ ٢ ص – ٦ = – س – ٢
أى : س + ٢ ص – ٤ = ٠

حل آخر :
المعادلة العامة هى : .... + ك (........................) = ٠
بالتعويض بالنقطة (..... ، .....)
∴ .... + ك (................................) = ٠
.... ∴ ك = ...
بالتعويض فى المعادلة العامة : ∴ المعادلة المطلوبة هى :
....
....
....

تمارين (١١)

(١) أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
٢ س + ص = ٥ ، س – ص = ١ وبالنقطة (٥ ، ٣)

(٢) أوجد معادلة الخط المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
٢ س + ٣ ص – ٥ = ٠ ، س + ٣ ص = ٧ وبالنقطة (٢ ، ٤)

(٣) أثبت أن المستقيمين : ٢ س – ٣ ص + ٤ = ٠ ، $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، ٢) + ك (– ٢ ، ٣) متقاطعان على التعامد ثم أوجد نقطة تقاطعهما .

(٤) أوجد المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة (٣ ، ١) وبنقطة تقاطع المستقيمين : ٣ س + ٢ ص – ٧ = ٠ ، س + ٣ ص = ٧

(٥) أوجد معادلة المستقيم المتجهة المار بنقطة تقاطع المستقيمين :
$\overrightarrow{ر}$ = ك (– ٣ ، ٢) ، ٣ س – ٢ ص = ١٣ ويوازى محور الصادات .

١ – المتطابقات

✪ الفرق بين المتطابقة والمعادلة :

المتطابقة : هى متساوية صحيحة لجميع قيم المتغير الحقيقية

المعادلة : هى متساوية صحيحة لبعض (وليس كل) قيم المتغير الحقيقية

✪ المتطابقات المثلثية الأساسية :

① متطابقة الدوال المثلثية ومقلوباتها :

جا θ × قتا θ = ١ ، جتا θ × قا θ = ١ ، ظا θ × ظتا θ = ١

حيث : قتا $\theta = \frac{١}{\text{جا}\,\theta}$ ، قا $\theta = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta}$ ، ظتا $\theta = \frac{١}{\text{ظا}\,\theta}$

ونلاحظ أن الدالة المثلثية ومقلوبها يحتويا على تاء واحدة فقط .

② العلاقة بين ظا θ وبين جا θ ، جتا θ :

ظا $\theta = \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta}$ ، ظتا $\theta = \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$

③ متطابقة الدوال المثلثية للزوايا المنتسبة :

أولاً : الانتساب للمحور الأفقى :

نبحث إشارة الدالة المثلثية

ثم نحذف رمز الربع .

الربع الأول : كل ، هـ
الربع الثانى : جا ، (١٨٠° − هـ)
الربع الثالث : ظا ، (١٨٠° + هـ)
الربع الرابع : جتا ، (٣٦٠° − هـ) ، − هـ
١٨٠° ، ٠° = ٣٦٠°

ثانياً : الانتساب للمحور الرأسى :

نبحث إشارة الدالة المثلثية

ثم نضيف التأتأة

ثم نحذف رمز الربع

٩٠°
الربع الأول : كل ، (٩٠° − هـ)
الربع الثانى : جا ، (٩٠° + هـ)
الربع الثالث : ظا ، (٢٧٠° − هـ)
الربع الرابع : جتا ، (٢٧٠° + هـ)
٢٧٠°

④ متطابقة فيثاغورث :

جا² θ + جتا² θ = ١ ⇐ { جا²θ = ١ − جتا²θ ، جتا²θ = ١ − جا²θ }

، ١ + ظا² θ = قا² θ ⇐ { ظا²θ = قا²θ − ١ ، قا²θ − ظا²θ = ١ }

، ١ + ظتا² θ = قتا² θ ⇐ { ظتا²θ = قتا²θ − ١ ، قتا²θ − ظتا²θ = ١ }

مثال (١)

أكتب كلاً من المقادير الآتية فى ابسط صورة :

(١) ١ + ظا² (٩٠ − θ)

(٢) (جا θ + جتا θ)² − ٢ جا θ جتا θ

(٣) جتا θ قا (٢ ط − θ)

الحل

(١) المقدار = ١ + ظتا² θ = قتا² θ

(٢) المقدار = جا² θ + ٢ جا θ جتا θ + جتا² θ − ٢ جا θ جتا θ
= ١

(٣) المقدار = جتا θ قا θ = ١

تدريب

أكتب كلاً من المقادير الآتية فى ابسط صورة :

(١) جا (٩٠ − θ) قتا θ

(٢) (جا θ + جتا θ)² + (جا θ − جتا θ)²

الحل

(١) جا (٩٠ − θ) قتا θ = ...

(٢) (جا θ + جتا θ)² + (جا θ − جتا θ)²

= ....

= ....

مثال (٢)

أثبت صحة المتطابقة : ظا θ + ظتا θ = قا θ قتا θ

الحل

الطرف الأيمن = ظا θ + ظتا θ = $\frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} + \frac{\text{جتا}\,\theta}{\text{جا}\,\theta}$

= $\frac{\text{جا}^2\theta + \text{جتا}^2\theta}{\text{جتا}\,\theta\ \text{جا}\,\theta} = \frac{١}{\text{جتا}\,\theta\ \text{جا}\,\theta}$ = قا θ قتا θ = الأيسر

مثال (٣)

أثبت صحة المتطابقة الآتية : (قا θ − ظا θ)² = $\frac{١ - \text{جا}\,\theta}{١ + \text{جا}\,\theta}$

الحل

الطرف الأيمن = (قا θ − ظا θ)² = $\left(\frac{١}{\text{جتا}\,\theta} - \frac{\text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} \right)^2$

= $\left(\frac{١ - \text{جا}\,\theta}{\text{جتا}\,\theta} \right)^2 = \frac{(١ - \text{جا}\,\theta)^2}{\text{جتا}^2\theta} = \frac{(١ - \text{جا}\,\theta)^2}{١ - \text{جا}^2\theta}$

= $\frac{(١ - \text{جا}\,\theta)^2}{(١ + \text{جا}\,\theta)(١ - \text{جا}\,\theta)} = \frac{١ - \text{جا}\,\theta}{١ + \text{جا}\,\theta}$ = الأيسر

• **ملحوظة** : يتضح لنا من المثالين السابقين أنه يفضل التحويل إلى جا θ ، جتا θ وذلك لسهولة الحل .

مثال (٤)

أثبت صحة المتطابقة : $\frac{١ - \text{ظتا}^2\theta}{١ + \text{ظتا}^2\theta}$ = ٢ جا² θ − ١

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{1 - \text{ظتا}^2 \theta}{\text{قتا}^2 \theta}$ ثم نقوم بالتحويل

= $\frac{1 - \frac{\text{جتا}^2 \theta}{\text{جا}^2 \theta}}{\frac{1}{\text{جا}^2 \theta}}$ وبالضرب × جا^2 θ بسطاً ومقاماً

= جا^2 θ – جتا^2 θ = جا^2 θ – (١ – جا^2 θ)

= جا^2 θ – ١ + جا^2 θ = ٢ جا^2 θ – ١ = الأيسر

تدريب

أثبت صحة المتطابقة الآتية : $\frac{\text{جا}^2 \theta}{1 - \text{جتا}\, \theta}$ = ١ + جتا θ

الحل

الطرف الأيمن = $\frac{1 - ......}{1 - \text{جتا}\, \theta}$ = $\frac{(1 - ......)(1 + ...)}{1 - \text{جتا}\, \theta}$

= .... = الطرف الأيسر

تمارين (١٢)

- ضع فى أبسط صورة :

(١) جتا (٩٠° – θ) قا (٩٠° – θ)

(٢) جا θ قتا θ – جتا^2 θ

(٣) جتا^2 θ قا θ قتا θ

(٤) جا θ جا (٩٠° – θ) ظا θ

(٥) جا (٩٠° – θ) جتا θ – جتا (٩٠° + θ) جا (π – θ)

- أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية :

(٦) ٢ جا^2 θ + جتا^2 θ = ١ + جا^2 θ

(٧) جا (٩٠° – θ) جتا θ = ١ – جا^2 θ

(٨) جتا θ + جا θ ظا θ = قا θ

(٩) قا θ – جا θ ظا θ = جتا θ

٢ ـ حل المعادلات المثلثية

ملحوظة : –١ ⩽ جا θ ⩽ ١ ، –١ ⩽ جتا θ ⩽ ١

✪ حل المعادلة المثلثية فى الفترة] ٠ ، ٢ π [:

مثال (١)

أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية حيث θ ∈] ٠ ، ٢ π [:

ظا θ – ١ = ٠

الحل

ظا θ = ١ ⇐ θ ∈ الربع الأول والربع الثالث

∴ θ = ٤٥° أ، θ = ١٨٠ + ٤٥° = ٢٢٥°

∴ مجموعة الحل = { ٤٥° ، ٢٢٥° }

تدريب

أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية حيث ٠ < θ ⩽ ٣٦٠° :

٢ جتا θ – ١ = ٠

الحل

٢ جتا θ – ١ = ٠ ⇐ ٢ جتا θ = ... ⇐ جتا θ = ...

∴ θ ∈ الربع .... ، والربع ....

∴ θ = ... ° أ، θ = ... ° – .... ° = ... °

∴ مجموعة الحل = { .... ° ، .... ° }

مثال (٢)

أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية حيث ٠ < θ ⩽ ٣٦٠° :

٢ جا θ جتا θ + ٣ جتا θ = ٠

الحل

٢ جا θ جتا θ + ٣ جتا θ = ٠ ⇐ جتا θ (٢ جا θ + ٣) = ٠

∴ جتا θ = ٠ ⇐ θ = ٩٠° أ، θ = ٢٧٠°

أو ٢ جا θ + ٣ = ٠ ⇐ جا θ = –١,٥ مرفوض

∴ مجموعة الحل = { ٩٠° ، ٢٧٠° }

تدريب

أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية حيث ٠ < θ ⩽ ١٨٠° :

٢ جا θ جتا θ + جتا θ = ٠

الحل

٢ جا θ جتا θ + جا θ = ٠

⇐ جا θ (.......... + ...) = ٠

∴ جا θ = ٠ ⇐ θ = ... ° أ، θ = ... °

أو ٢ جتا θ + ١ = ... ⇐ جتا θ = ...

∴ θ ∈ الربع .... ، والربع .... (مرفوض)

∴ θ = ١٨٠ – .... ° = ... °

∴ مجموعة الحل = { ...... ° ، .... ° ، .... ° }

مثال (٣)

أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية حيث θ ∈ [٠ ، ٢ π [:

٢ جا θ جتا θ = –$\sqrt{3}$ جا θ

الحل

٢ جا θ جتا θ + $\sqrt{3}$ جا θ = ٠ ⇐ جا θ (٢ جتا θ + $\sqrt{3}$) = ٠

∴ جا θ = ٠ ⇐ θ = ٠ أ، θ = ١٨٠°

أو ٢ جتا θ + √٣ = ٠ ⇐ ٢ جتا θ = −√٣

⇐ جتا θ = $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ∴ θ ∈ الربع الثانى والربع الثالث

⇐ θ = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠° أ، θ = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠°

∴ مجموعة الحل = {٠°، ١٨٠°، ١٥٠°، ٢١٠°}

مثال (٤)

أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية حيث θ ∈ [٠، ٢π[:

٤ جا² θ − ٣ جا θ جتا θ = ٠

الحل

جا θ (٤ جا θ − ٣ جتا θ) = ٠

∴ جا θ = ٠ ⇐ θ = ٠ أ، θ = ١٨٠°

أو ٤ جا θ − ٣ جتا θ = ٠ وبالقسمة على جتا θ

⇐ $\frac{٤ جا θ}{جتا θ}$ − ٣ = ٠ ⇐ ٤ ظا θ − ٣ = ٠

⇐ ظا θ = $\frac{٣}{٤}$ ∴ θ ∈ الربع الأول والربع الثالث

∴ θ = ٣٦° ٥٢′ أ، θ = ١٨٠ + ٣٦° ٥٢′ = ٢١٦° ٥٢′

∴ مجموعة الحل = {٠°، ١٨٠°، ٣٦° ٥٢′، ٢١٦° ٥٢′}

تدريب

أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية حيث θ ∈ [٠، ٢π[:

√٣ جا θ ظا θ − جا θ = ٠

الحل

جا θ (√٣ ظا θ − ....) = ٠

∴ جا θ = ٠ ⇐ θ = ... ° أ، θ = ... °

أو .... = ٠

⇐ .... ظا θ = ... ⇐ ظا θ = ...

⇐ θ ∈ الربع .... ، والربع ....

∴ θ = ... ° أ، θ = ١٨٠° + ٣٠° = ... °

∴ مجموعة الحل = { ...... °، ...... °، ...... °، ...... ° }

✪ **الحل العام للمعادلة المثلثية :**

لإيجاد الحل العام للمعادلة المثلثية

نوجد مجموعة حل المعادلة فى الفترة [٠، ٢π[ثم نضيف ٢ن π حيث ن ∈ ص لجميع الحلول الناتجة.

ففى مثال (١) يكون الحل العام = ٤٥° + ٢ن π ، ٢٢٥° + ٢ن π

وفى مثال (٢) : الحل العام = ٩٠° + ٢ن π ، ٢٧٠° + ٢ن π

وفى مثال (٣) : الحل العام = ٢ن π ، ١٨٠° + ٢ن π ، ١٥٠° + ٢ن π ، ٢١٠° + ٢ن π حيث ن ∈ ص

وفى مثال (٤) : الحل العام = ٢ن π ، ١٨٠° + ٢ن π ، ٣٦° ٥٢′ + ٢ن π ، ٢١٦° ٥٢′ + ٢ن π حيث ن ∈ ص

مثال (٥)

أوجد الحل العام للمعادلة : جتا θ = ٢ جتا² θ

الحل

جتا θ = ٢ جتا² θ ⇐ ٢ جتا² θ − جتا θ = ٠

∴ جتا θ (٢ جتا θ − ١) = ٠

∴ جتا θ = ٠ ⇐ θ = ٩٠° أ، θ = ٢٧٠°

أو ٢ جتا θ − ١ = ٠ ⇐ جتا θ = $\frac{١}{٢}$

⇐ θ ∈ الربع الأول والربع الرابع

∴ θ = ٦٠° أ، θ = ٣٦٠° − ٦٠° = ٣٠٠°

∴ الحل العام للمعادلة = ٩٠° + ٢ن π ، ٢٧٠° + ٢ن π ، ٦٠° + ٢ن π ، ٣٠٠° + ٢ن π حيث ن ∈ ص

مثال (٦)

إذا كانت جتا θ = جا ٢θ فإن ٢θ ± θ = ٩٠ + ٢ن π

∴ ٢θ + θ = ٩٠° + ٢ن π (نبدأ بوضع زاوية الجيب أولاً)

⇐ ٣θ = ٩٠° + ٢ن π

⇐ θ = ٣٠° + ١٢٠ ن

أ، ٢θ − θ = ٩٠° + ٢ن π ⇐ θ = ٩٠° + ٢ن π

∴ الحل العام = ٣٠° + ١٢٠ ن ، ٩٠° + ٣٦٠ ن حيث ن ∈ ص

تمارين (١٣)

• أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

(١) قا θ = √٢

(٢) قتا θ = −٢

(٣) ظا θ = −١

(٤) √٢ جا θ جتا θ − جا θ = ٠

(٥) ٢ جتا (٩٠° − θ) = ١

• أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية حيث θ ∈ [٠، ٢π[:

(٦) جا θ − جتا θ = ٠

(٧) جا θ − ٢ جتا θ = ٠

(٨) √٢ جتا θ + ٢ = ٠

(٩) ٤ جا θ + ٣ = ٠

(١٠) ٢ جا² θ − ٥ جا θ + ٢ = ٠

٣ – حل المثلث القائم الزاوية

✪ **حل المثلث القائم الزاوية إذا عُلم منه طولا ضلعين :**

مثال (١)

حل المثلث أب جـ القائم الزاوية فى ب : أب = ٨ سم ، ب جـ = ١٢ سم

الحل

أولاً : نوجد ق(جـ^) :

ق(جـ^) = ظا$^{-1}$ (٨/١٢) = ٣٣° ٤١َ

ثانياً : نوجد ق(أ^) :

ق(أ^) = ٩٠° − ٤١َ ٣٣° = ١٩َ ٥٦°

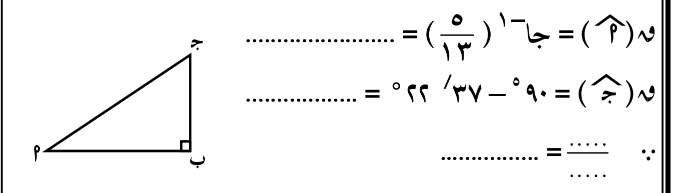
ثالثاً : نوجد طول أجـ :

٨/أجـ = جا ٤١َ ٣٣° ⟸ أجـ = ٨/جا ٤١َ ٣٣° = ١٤,٤٢ سم

تدريب

حل المثلث أب جـ القائم الزاوية فى ب : أجـ = ١٣ سم ، ب جـ = ٥ سم

الحل



ق(أ^) = جا$^{-1}$ (٥/١٣) = ...

ق(جـ^) = ٩٠° − ٣٧َ ٢٢° = ...

∵ ...../..... = ...

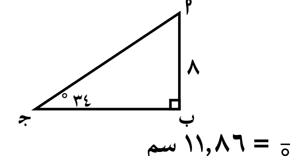
∴ أب = ... = ١٢ سم

✪ **حل المثلث القائم الزاوية إذا عُلم منه طول ضلع وقياس زاوية :**

مثال (٢)

حل المثلث أب جـ القائم الزاوية فى ب : أب = ٨ سم ، ق(جـ^) = ٣٤° مقرباً الناتج لرقمين عشريين .

الحل



أولاً : نوجد ق(أ^) :

ق(أ^) = ٩٠° − ٣٤° = ٥٦°

ظا ٣٤° = ٨/ب جـ ⟸ ب جـ = ٨/ظا ٣٤° = ١١,٨٦ سم

جا ٣٤° = ٨/أجـ ⟸ أجـ = ٨/جا ٣٤° = ١٤,٣١ سم

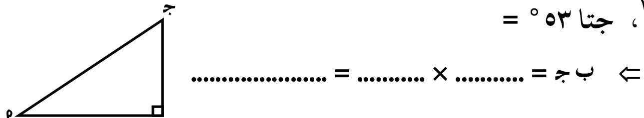
تدريب

حل المثلث أب جـ القائم الزاوية فى ب : أجـ = ٢٦ سم ، ق(جـ^) = ٥٣°

الحل

ق(أ^) = ...

جا ٥٣° = ... ∴ أب = ... = ...



، جتا ٥٣° =

⟸ ب جـ = ... × .... = ...

• **تذكر أن :**

(١) العمود الساقط من مركز الدائرة على وتر فيها ينصفه وينصف زاويته المركزية .

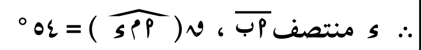
(٢) الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة قائمة .

مثال (٣)

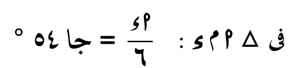
دائرة طول نصف قطرها ٦ سم ، رُسم فيها وتر يقابل زاوية مركزية ١٠٨° . احسب طول هذا الوتر مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين .

الحل

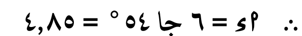
نرسم مء ⊥ أب



∴ ء منتصف أب ، ق(أمء) = ٥٤°



فى △ أمء : أء/٦ = جا ٥٤°



∴ أء = ٦ جا ٥٤° = ٤,٨٥

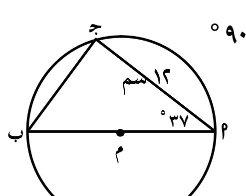
⟸ أب = ٢ × ٤,٨٥ = ٩,٧ سم

تدريب

أب قطر فى الدائرة م ، ق(أ^) = ٣٧° ، أجـ = ١٢ سم .

أوجد طول نصف قطر الدائرة لأقرب رقمين عشريين .

الحل



∵ .... ∴ ق(جـ^) = ٩٠°

جتا ٣٧° = ...

∴ أب = ... = ١٥,٠٣ سم

∴ نق = ... ÷ ٢ = ٧,٥٢ سم

تمارين (١٤)

• حل المثلث أب جـ القائم الزاوية فى ب مقرباً قياسات الزوايا لأقرب درجة والطول لأقرب سم حيث :

(١) أب = ٤ سم ، ب جـ = ٦ سم

(٢) أب = ١٢,٥ سم ، ب جـ = ١٧,٦ سم

(٣) أب = ٥,٣ سم ، أجـ = ١٢,٢ سم

(٤) ب جـ = ٣١ سم ، أجـ = ٤٢ سم

(٥) ق(∠جـ) = ٦٢° ، أجـ = ٧٦ سم

• حل المثلث أب جـ القائم الزاوية فى ب مقرباً قياسات الزوايا لأقرب ثلاثة أرقام عشرية من الراديان والطول لأقرب ثلاثة أرقام

عشرية من السنتيمترات حيث :

(٦) ق(∠ أ) = ٠,٩٢٥ ء ، ب جـ = ٨ سم

(٧) ق(∠ أ) = ١,١٦٩ ء ، أب = ١٨ سم

(٨) ق(∠ جـ) = ١,٠٨٢ ء ، أجـ = ٣٥,٨ سم

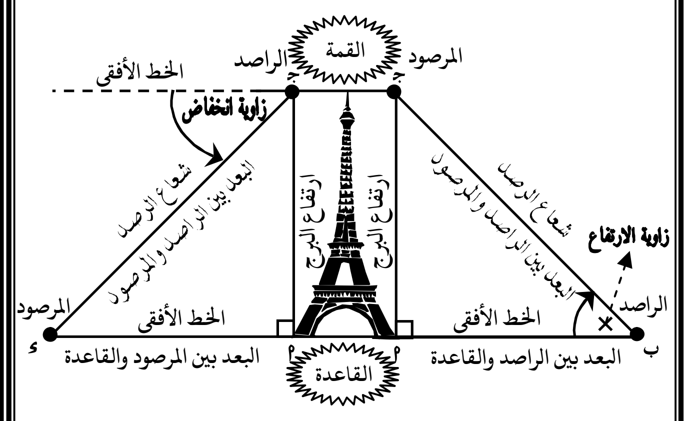
(٩) أ ب جـ مثلث ، رسم $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ فإذا كان : أء = ٦ سم ، ق(∠ ب) = ٥٢° ، ق(∠ جـ) = ٢٨°

فأوجد طول $\overline{\text{ب جـ}}$ لأقرب سنتيمتر.

(١٠) دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم ، رسم فيها وتر $\overline{\text{أب}}$ يقابل زاوية مركزية قياسها ١١٠° .

احسب طول $\overline{\text{أب}}$ لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .

٤ – زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

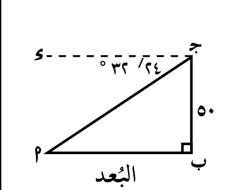


(يتم دراسة الشكل السابق بالتفصيل)

مثال (٤)

من قمة برج ارتفاعه ٥٠ متراً وُجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج تساوى ٢٤َ ٣٢° . أوجد بُعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر.

الحل



ق($\widehat{\text{أ}}$) = ق(∠ ء جـ أ) = ٢٤َ ٣٢°

ظا ٢٤َ ٣٢° = $\frac{٥٠}{\text{ب أ}}$

∴ أ ب = $\frac{٥٠}{\text{ظا ٢٤َ ٣٢°}}$ = ٧٩ متراً

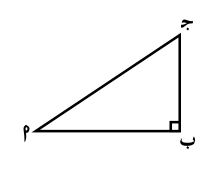
∴ بُعد الجسم عن قاعدة البرج = ٧٩ متراً

تدريب

من نقطة على سطح الأرض على بُعد ٤٢ متراً من قاعدة مئذنة قاس رجل زاوية ارتفاع قمة المئذنة فوجد قياسها ٥٠° .

أوجد ارتفاع المئذنة لأقرب متر.

الحل



.... = ظا ٥٠°

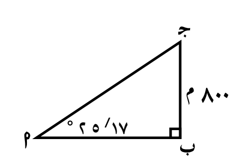
∴ ب جـ = ... = ٣٢ متر

∴ ارتفاع المئذنة = ... متر تقريباً

مثال (٥)

رصد شخص واقف على سطح الأرض طائرة على ارتفاع ٨٠٠ متر عن سطح الأرض ، فوجد أن قياس زاوية ارتفاعها ١٧َ ٢٥° . أوجد المسافة بين الشخص والطائرة .

الحل



$\frac{٨٠٠}{\text{أجـ}}$ = جا ١٧َ ٢٥°

∴ أ جـ = $\frac{٥٠}{\text{جا ١٧َ ٢٥°}}$ = ١٨٧٣ متر

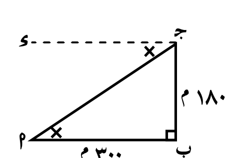
∴ المسافة بين الشخص والطائرة = ١٨٧٣ متر

مثال (٦)

من قمة صخرة ارتفاعها ١٨٠ متر من سطح البحر قيست زاوية انخفاض قارب يبعد ٣٠٠ متر عن قاعدة الصخرة .

فما مقدار قياس زاوية الانخفاض .

الحل



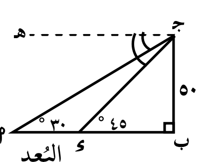
$\frac{١٨٠}{٣٠٠}$ = ظا أ = $\frac{٣}{٥}$

⇐ ق($\widehat{\text{أ}}$) = ظا$^{-١}$ ($\frac{٣}{٥}$) = ٥٨َ ٣٠° = ق($\widehat{\text{ء جـ أ}}$) بالتبادل

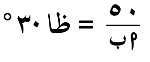
مثال (٧)

من قمة صخرة ارتفاعها ٥٠ متراً رصد شخص سفينتين فى البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخرة وقاس زاويتى انخفاضيهما فوجد قياسيهما ٣٠° ، ٤٥° . أوجد البُعد بين السفينتين لأقرب متر .

الحل



فى Δ أ ب جـ :



$\frac{٥٠}{\text{ب أ}}$ = ظا ٣٠°

⇐ أ ب = $\frac{٥٠}{\text{ظا٣٠°}}$ = ٨٦,٦ = ٨٧ متر

فى Δ ء ب جـ :

$\frac{٥٠}{\text{ء ب}}$ = ظا ٤٥° = ١ ⇐ ء ب = ٥٠ متر

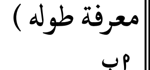
∴ أ ء = أ ب – ء ب = ٨٧ – ٥٠ = ٣٧ متر

تدريب

يقف شخص على بعد ٥٠ متر من قاعدة برج ، رصد زاوية ارتفاع قمة برج ، فوجد أن قياسها ٢٥° . أوجد ارتفاع البرج لأقرب متر .

الحل

(أرسم المثلث القائم وبيّن عليه المعطيات وحدد الضلع المطلوب معرفة طوله)



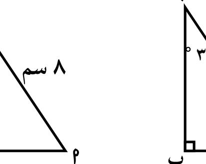
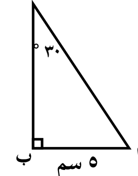
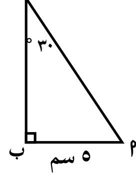
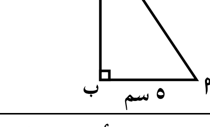
$\frac{أب}{٥٠}$ = ...

∴ أب = ٥٠ ظا ٢٥° = ...

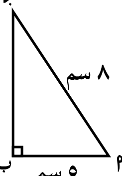
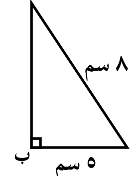
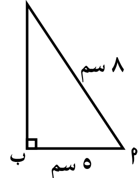
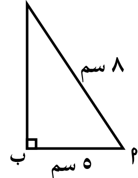
∴ ارتفاع البرج = ... متر

تمارين (١٥)

(١) أوجد طول $\overline{بجـ}$ فى كل من الأشكال الآتية :

(٢) أوجد قياس زاوية جـ فى كل من الأشكال الآتية :

(٣) من نقطة على سطح الأرض على بعد ٢٤ متراً من قاعدة مئذنة رصد رجل زاوية ارتفاع قمة المئذنة فوجد قياسها ٤٥° . أوجد

ⓐ ارتفاع المئذنة لأقرب متر .

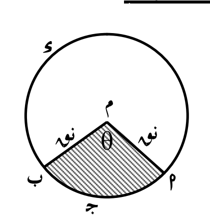
ⓑ بُعد الرجل عن قمة المئذنة .

(٤) من قمة برج ارتفاعه ٤٠ متراً وُجد أن قياس زاوية انخفاض جسم واقع فى المستوى الأفقى المار بقاعدة البرج ٢٥°

أوجد بُعد الجسم عن قاعدة البرج لأقرب متر .

الصديق عملة نادرة

٥ – القطاع الدائرى



هو جزء من سطح الدائرة محدود بنصفى قطرين وقوس

القطاع الأصغر م أ جـ ب ، القطاع الأكبر م أ ء ب

✪ مساحة القطاع الدائرى :

(١) إذا عُلمت مساحة الدائرة :

مساحة القطاع = $\frac{\theta^ء}{٢\pi}$ × مساحة الدائرة

أ، مساحة القطاع = $\frac{س^\circ}{٣٦٠^\circ}$ × مساحة الدائرة

(٢) إذا عُلم طول نصف قطر الدائرة :

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ × $\theta^ء$

(٣) إذا عُلم طول قوسه : مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق

✪ **محيط القطاع الدائرى** : = ٢ نق + ل

✪ تذكر أن :

(١) طول القوس : ل = $\theta^ء$ × نق

(٢) العلاقة بين القياس الستينى والقياس الدائرى : $\frac{\theta^ء}{\pi} = \frac{س^\circ}{١٨٠^\circ}$

(٣) مساحة الدائرة = π نق^٢

مثال (١)

أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٦ سم وقياس زاويته ١,٢^ء .

الحل

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ نق^٢ × $\theta^ء$ = $\frac{١}{٢}$ × (٦)^٢ × ١,٢ = ٢١,٦ سم^٢

مثال (٢)

أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وقياس زاويته ٦٩° لأقرب سنتيمتر مربع .

الحل

مساحة القطاع = $\frac{س^\circ}{٣٦٠^\circ}$ × مساحة الدائرة

= $\frac{٦٩}{٣٦٠}$ × π (١٠)^٢ = ٦٠ سم^٢

تدريب

أكمل : مساحة القطاع الدائرى الذى طول قوسه ١٠ سم ، وطول قطر دائرته ١٦ سم تساوى .... سم^٢

الحل

نق = ... سم

مساحة القطاع = $\frac{١}{٢}$ × .... = ... = ...

مثال (٣)

قطاع دائرى مساحته ٢٧٠ سم^2 وطول نصف قطر دائرته ١٥ سم ، أوجد قياس زاويته المركزية بالقياسين الدائرى والستينى .

الحل

∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ نق^2 × $\theta^{ء}$

∴ ٢٧٠ = $\frac{1}{2}$ (١٥)^2 × $\theta^{ء}$

⇐ $\theta^{ء}$ = (٢ × ٢٧٠) ÷ (١٥)^2 = ٢,٤^{ء}

⇐ س° = ٢,٤ × $\frac{180}{\pi}$ = ٣١′ ١٣٧°

مثال (٤)

قطاع دائرى مساحته ٤٨ سم^2 ، وطول قطر دائرته ١٦ سم ، أوجد محيطه .

الحل

∵ مساحة القطاع = $\frac{1}{2}$ ل نق

∴ ٤٨ = $\frac{1}{2}$ ل × ٨ ⇐ ل = (٢ × ٤٨) ÷ ٨ = ١٢ سم

⇐ محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ × ٨ + ١٢ = ٢٨ سم

تدريب

أكمل ما يأتى :

(١) مساحة القطاع الدائرى الذى فيه ل = ٦ سم ، نق = ٤ سم هى ..

(٢) القطاع الدائرى هو ....

(٣) قطاع دائرى مساحته ٣٠ سم^2 ، وطول قوسه ١٠ سم يكون طول نصف قطر دائرته يساوى .... سم .

(٤) قطاع دائرى مساحته ٦٠ سم^2 ، وطول نصف قطر دائرته ١٠ سم يكون طول قوسه يساوى .... سم .

(٥) قطاع دائرى مساحته ٢٤ سم^2 ، وطول قوسه ٨ سم يكون محيطه يساوى .... سم .

(٦) قطاع دائرى مساحته ١١٠ سم^2 وقياس زاويته ٢,٢^{ء} فإن طول نصف قطر دائرته يساوى .... سم .

(٧) قطاع دائرى محيطه ٢٥ سم ، وطول قوسه ٧ سم فإن مساحته ..

الحل

(١) ....

(٢) ....

....

(٣) ....

....

(٤) ....

....

(٥) ....

....

(٦) ....

....

(٧) ....

....

تمارين (١٦)

(١) قطاع دائرى طول قوسه ١٦ سم وطول نصف قطر دائرته ٩ سم احسب مساحة القطاع لأقرب سم^2 .

(٢) قطاع دائرى قياس زاويته المركزية ٣٠° وطول نصف قطر دائرته ٣,٥ سم احسب مساحته لأقرب سم^2 .

(٣) أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول قطر دائرته ٢٠ سم وقياس زاويته ١٢٠° .

(٤) أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ١٠ سم وقياس زاويته المركزية ١,٢^{ء} .

(٥) قطاع دائرى طول قوسه ٧ سم ، ومحيطه ٢٥ سم . أوجد مساحته .

(٦) قطاع دائرى محيطه ٢٤ سم وطول قوسه ١٠ سم أوجد مساحة سطح الدائرة التى تحوى هذا القطاع .

(٧) قطاع دائرى مساحته ٢٧٠ سم^2 وطول نصف قطر دائرته ١٥ سم أوجد طول قوس القطاع وقياس زاويته المركزية بالراديان .

(٨) حوض زهور على شكل قطاع دائرى مساحته ٤٨ م^2 وطول قوسه ٦ م أوجد محيطه وطول نصف قطر دائرته .

٦ – القطعة الدائرية

جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيه ووتر مار بنهايتى هذا القوس

القطعة الصغرى ٲ جـ ب ، والقطعة الكبرى ٲ ء ب

✪ **مساحة القطعة الدائرية :**

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{1}{2}$ نق^2 ($\theta^{ء}$ − جا θ)

، مساحة القطعة الكبرى = مساحة الدائرة – مساحة القطعة الصغرى

مثال (١)

أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، وقياس زاويتها ١٠٠° مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين .

الحل

$\theta^{ء} = ١٠٠ \times \frac{\pi}{١٨٠} = ١,٧٥^{ء}$

∵ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ – جا θ)

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢} \times (١٠)^{٢}$ (١,٧٥ ء – جا ١٠٠)

= ٣٨,٢٦ سم^{٢}

مثال (٢)

أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، وقياس زاويتها ٢,٢ ء مقرباً الناتج لأقرب رقمين عشريين .

الحل

س° = $٢,٢ \times \frac{١٨٠}{\pi}$ = ١٢٦° ٣َ

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢} \times (١٠)^{٢}$ (٢,٢ – جا ١٢٦° ٣َ)

= ٦٩,٥٧ سم^{٢}

حل آخر :

نحوّل نظام الآلة إلى النظام الدائرى (**Radial**) كالآتى :

SHIFT MODE 4

∴ مساحة القطعة = $\frac{١}{٢} \times ١٠^{٢}$ (٢,٢ – جا ٢,٢) = ٦٩,٥٧ سم^{٢}

تدريب

أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٢ سم ، وقياس زاويتها المركزية ١٥٠° .

الحل

$\theta^{ء}$ = ١٥٠ × .... = ...

∴ مساحة القطعة الدائرية = ...

....

✪ تذكر أن : ل = $\theta^{ء}$ × نق

مثال (٣)

أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ٨ سم ، وطول قوسها ٢٢ سم .

الحل

∵ ل = $\theta^{ء}$ × نق ∴ ٢٢ = $\theta^{ء}$ × ٨ ⇐ $\theta^{ء}$ = ٢,٧٥ ء

⇐ س° = ٢,٧٥ × ١٨٠ ÷ π = ١٥٧° ٣٤َ

∵ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ – جا θ)

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢} \times ٨^{٢}$ (٢,٧٥ – جا ١٥٧° ٣٤َ)

= ٧٥,٧٩ سم^{٢}

حل آخر :

∵ ل = $\theta^{ء}$ × نق ∴ ٢٢ = $\theta^{ء}$ × ٨ ⇐ $\theta^{ء}$ = ٢,٧٥ ء

∵ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ – جا θ)

نحوّل نظام الآلة إلى النظام الدائرى (**Radial**) كالآتى :

SHIFT MODE 4

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢} \times ٨^{٢}$ (٢,٧٥ – جا ٢,٧٥)

= ٧٥,٧٩ سم^{٢}

تدريب

أكمل :

(١) قطعة دائرية طول قوسها ٢٠ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ٦ سم فإن قياس زاويتها المركزية = ... ء ، = ... °

الحل

....

....

(٢) قطعة دائرية طول وترها ٦ سم ، وطول نصف قطر دائرتها ٦ سم فإن قياس زاويتها المركزية = ... ء ، = ... °

الحل

....

....

مثال (٤)

أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطرها ١٥ سم وارتفاعها ٥ سم مقرباً الناتج لأقرب سنتيمتر مربع .

الحل

م ء = نق – ء جـ = ١٥ – ٥ = ١٠ سم

فى △ أ م ء : جتا ∠ أ م ء = $\frac{١٠}{١٥}$

⇐ ق(∠ أ م ء) = جتا$^{-١}$ ($\frac{١٠}{١٥}$)

= ٤٨° ١١َ

∴ ق(∠ أ م ب) = θ = ٢ × ٤٨° ١١َ

= ٩٦° ٢٢َ

⇐ $\theta^{ء}$ = ٩٦° ٢٢َ × π ÷ ١٨٠ = ١,٦٨ ء

∵ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} ($\theta^{ء}$ – جا θ)

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢} \times ١٥^{٢}$ (١,٦٨ – جا ٩٦° ٢٢َ)

= ٧٧,١٩ سم^{٢}

ملحوظة :

فى المثال السابق :

مساحة القطعة الكبرى = π نق٢ – مساحة القطعة الصغرى

= π × (١٥)٢ – ٧٧,١٩ = ٦٢٩,٦٧ سم٢

تمارين (١٧)

(١) أكمل مايأتى :

ⓐ قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم ، وطول وقوسها ٥ سم فإن القياس الدائرى لزاويتها المركزية = ... ء

ⓑ مساحة القطعة الدائرية = ...

ⓒ مساحة القطعة الكبرى = ... – ....

ⓓ س° = θ ء × $\frac{......}{......}$ ، θ ء = س° × $\frac{......}{......}$

(٢) أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ٨ سم ، وقياس زاويتها = ١,٤ ء

(٣) أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطر دائرتها ١٢ سم ، وقياس زاويتها = ١٣٥ ° ثم أوجد مساحة القطعة الدائرية الكبرى

(٤) أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول وترها ٨ سم وبعده عن مركز الدائرة ٣ سم .

(٥) قطعة دائرية قياس زاويتها المركزية ٩٠ ° ومساحة سطحها ٥٦ سم٢ . أوجد طول نصف قطرها .

٦ – المساحات

✪ مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × طول الارتفاع

✪ مساحة سطح المثلث :

= $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

✪ مساحة سطح الشكل الرباعى :

= $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

✪ مساحة سطح المضلع المنتظم = $\frac{١}{٤}$ ن س٢ × ظتا $\frac{\pi}{ن}$

حيث : ن = عدد أضلاع المضلع ، س = طول الضلع

• **حالات خاصة** :

(١) مساحة المربع = $\frac{١}{٢}$ مربع طول قطره

(٢) مساحة المعيّن = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه

(٣) قياس زاوية رأس المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ن ضلعاً

= $\frac{(ن-٢) × ١٨٠°}{ن}$

مثال (١)

أوجد مساحة سطح المثلث أ ب جـ الذى فيه أ ب = ١٦ سم ، ب جـ = ٢٢ سم ، ق(ب̂) = ٦٣ ° مقرباً الناتج لأقرب ثلاثة أرقام عشرية .

الحل

مساحة سطح المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × أ ب × ب جـ × جا ب

= $\frac{١}{٢}$ × ١٦ × ٢٢ × جا ٦٣ ° = ١٥٦,٨١٧ سم٢

مثال (٢)

أوجد مساحة سطح مربع طول قطره ١٠ سم

الحل

مساحة سطح المربع = $\frac{١}{٢}$ مربع طول قطره = $\frac{١}{٢}$ × (١٠)٢ = ٥٠ سم٢

مثال (٣)

أوجد مساحة الشكل الرباعى الذى طولا قطريه ٢٨ ، ٤٥ سم وقياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٠ ° مقرباً الجواب لأقرب رقمين عشريين .

الحل

مساحة سطح الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولا قطريه × جيب الزاوية المحصورة بينهما

∴ مساحة الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢}$ × ٢٨ × ٤٥ × جا ١٢٠ °

= ٥٤٥,٦٠ سم٢

تدريب

أوجد مساحة سطح معيّن طولا قطريه ١٠ سم ، ١٤ سم .

الحل

∵ مساحة سطح المعيّن = ...

....

مثال (٤)

أوجد مساحة الشكل الخماسى المنتظم الذى طول ضلعه ١٢ سم مقرباً الناتج لأقرب سنتيمتر مربع .

الحل

مساحة سطح الخماسى المنتظم = $\frac{١}{٤}$ ن س٢ × ظتا $\frac{\pi}{ن}$

= $\frac{١}{٤}$ × ٥ × (١٢)٢ × ظتا $\frac{\pi}{٥}$ = $\frac{١}{٤}$ × ٥ × ١٤٤ × ظتا ٣٦°

= ٢٤٨ سم٢

تدريب

أكمل مايأتى :

(١) قياس زاوية رأس الثمانى المنتظم = ... °

(٢) مساحة سطح المثلث المتساوى الأضلاع ، وطول ضلعه ١٠ سم تساوى .... سم٢ .

(٣) مساحة الشكل الثمانى المنتظم الذى طول ضلعه ل سم تساوى سم٢

الحل

(١) ....
....

(٢) ....
....

(٣) ....
....

مثال (٥)

أ ب جـ Δ مساحة سطحه ١٥٦,٨١٧ سم٢ فإذا كان : أ ب = ١٦ سم ، ب جـ = ٢٢ سم فأوجد ق(ب̂) لأقرب درجة .

الحل

∵ مساحة سطح المثلث = $\frac{1}{2}$ × أ ب × ب جـ × جا ب

∴ ١٥٦,٨١٧ = × ١٦ × ٢٢ × جا ب

⇐ جا ب = ٠,٨٩١ ∴ ق(ب̂) = جا$^{-1}$ (٠,٨٩١) = ٦٣°

تدريب

أ ب جـ Δ متساوى الأضلاع مساحته ٩ $\sqrt{3}$ سم٢ فأوجد طول ضلعه .

الحل

∵ مساحة سطح المثلث المتساوى الأضلاع = ...

∴ ....
....

مثال (٦)

أوجد مساحة سطح المعيّن الذى فيه قياس إحدى زواياه ٧٠° وطول ضلعه ٨ سم لأقرب رقم عشرى واحد .

الحل

مساحة سطح المعيّن = ٢ × مساحة سطح المثلث

مساحة سطح المثلث المتساوى الساقين والذى قياس زاوية رأسه ٧٠° وطول أحد ساقيه ٨ سم = $\frac{1}{2}$ × ٨ × ٨ × جا ٧٠° = ٣٠ سم٢

∴ مساحة سطح المعيّن = ٢ × ٣٠ = ٦٠ سم٢

تمارين (١٨)

(١) أكمل مايأتى :

Ⓐ مساحة سطح المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه س ضلعاً وطول كل منهم ل سم تساوى سم٢

Ⓑ مساحة الشكل السداسى المنتظم الذى طول ضلعه ٢ سم تساوى سم٢

Ⓒ مساحة سطح المثلث = ... حاصل ضرب طولى ضلعين × ....

Ⓓ قياس زاوية رأس الخماسى المنتظم = ... °

(٢) أوجد مساحة سطح المثلث المتساوى الساقين الذى طول أحد ساقيه ٨ سم وقياس زاوية راسه ٦٠° لأقرب رقم عشرى واحد .

(٣) أوجد مساحة سطح المثلث الذى فيه طولا ضلعين ٧ سم ، ٨ سم ، قياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٤° لأقرب رقمين عشريين .

(٤) أوجد مساحة سطح الشكل الخماسى المنتظم الذى طول ضلعه ١٠ سم لأقرب رقمين عشريين

(٥) أوجد مساحة سطح مضلع منتظم عدد أضلاعه = ١٠ اضلاع وطول كل منهم = ١٠ سم لأقرب عدد صحيح .

(٦) مضلع ثمانى منتظم مساحة سطحه ٣٢ ظتا $\frac{\pi}{8}$ سم٢ ، أوجد طول ضلعه .

(٧) أوجد مساحة الشكل الرباعى المحدب الذى طولا قطريه ١٢ ، ٨ سم ، وقياس الزاوية المحصورة بينهما ٣٠° .

ومن يتهيب صعود الجبال
يعش أبد الدهر بين الحُفر

الأستاذ / علىّ الدين يحيى

حلول التمارين

تمارين (١)

(١) ٢ س = -٨ ⇐ س = -٤ ، س + ص = -٥ ∴ -٤ + ص = -٥ ⇐
ص = -١ ، ع - ص = ٩ ∴ ع + ١ = ٩ ⇐ ع = ٨

(٢) ∵ أ = ب ∴ س = ٦ ، ص = ١٨ ∴ ٣ س - ص = ٣ (٦) - ١٨ = صفر

(٣) أ = $\begin{pmatrix} ٨ & ٢ \\ ٦ & -٤ \end{pmatrix}$ ، ∵ أ = ب ∴ $\begin{pmatrix} ٨ & س \\ ص & -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٢ \\ ٦ & -٤ \end{pmatrix}$
∴ س = ٢ ، ص = ٦ ⇐ ٣ س + ص = ٣ (٢) + ٦ = ١٢

(٤) ∵ المصفوفة أ متماثلة ∴ ص - ١ = -٦ ⇐ ص = -٥

(٥) ∵ المصفوفة أ شبة متماثلة ∴ ص - ١ = ٦ ⇐ ص = ٧

(٦) ∵ س = $ص^{مد}$ ∴ $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -٦ & أ+ب \\ ٨ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ -٦ & ١ \\ ٨ & ب \end{pmatrix}$
∴ ب = ٧ ، أ + ب = ١ ∴ أ + ٧ = ١ ⇐ أ = -٦
٤ أ + ب = ٤ (-٦) + ٧ = -١٧

(٧) $أ_{١١}$ = ٢ (١) + ١ = ٣ ، $أ_{٢١}$ = ٢ (١) + ٢ = ٤ ، $أ_{٣١}$ = ٢ (١) + ٣ = ٥
، $أ_{١٢}$ = ٢ (٢) + ١ = ٥ ، $أ_{٢٢}$ = ٢ (٢) + ٢ = ٦ ، $أ_{٣٢}$ = ٢ (٢) + ٣ = ٧
، $أ_{١٣}$ = ٢ (٣) + ١ = ٧ ، $أ_{٢٣}$ = ٢ (٣) + ٢ = ٨ ، $أ_{٣٣}$ = ٢ (٣) + ٣ = ٩
∴ أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٤ & ٣ \\ ٧ & ٦ & ٥ \\ ٩ & ٨ & ٧ \end{pmatrix}$

تمارين (٢)

(١) $\begin{pmatrix} ص+١ & س+٥ \\ أ-٣ & ع+٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ ⇐ ٥ + س = ٤ ∴ س = -١
، ١ + ص = ٣ ∴ ص = ٢ ، ع + ٢ = ٢ ∴ ع = ٠ ، أ - ٣ = -١ ∴ أ = ٢

(٢) $\begin{pmatrix} أ & ٥ & س \\ -٢ & ب & ٨ \\ ص & -٣ & ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٤ & ٥ & ٣ \\ -٢ & ١ & ٨ \\ ١٣ & -٣ & -١ \end{pmatrix}$
⇐ س = ٣ ، أ = -٤ ، ب = ١ ، ع = -١ ، ص = ١٣

(٣) $\begin{pmatrix} ١ & ع-٧ \\ ٤ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ص & ٤ \\ ٢أ & -١٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٩ & ٣ \\ ٦ & ٣س \end{pmatrix}$
∴ $\begin{pmatrix} ١ & ع-٧ \\ ٤ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩-٢ص & -١ \\ ٦-٢أ & ٣س+١٠ \end{pmatrix}$ ⇐ ع - ٧ = -١ ∴ ع = ٦
، ٩ - ٢ص = ١ ∴ ٢ص = ٨ ∴ ص = ٤ ، ٣ س + ١٠ = ٤ ∴ ٣ س = -٦
∴ س = -٢ ، ٦ - ٢أ = ٤ ∴ ٢أ = ٢ ∴ أ = ١

(٤) س = ٢أ - $ب^{مد}$ = $\begin{pmatrix} ٦ & -١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & -٣ \end{pmatrix}٢$
∴ س = $\begin{pmatrix} -٤ & ٥ \\ ١٢ & -٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٦ & -١ \\ -٢ & ١ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ١٠ & -٦ \end{pmatrix}$

تمارين (٣)

(١) (أ) ٣ × ٣ (ب) ٣ × ١ (جـ) ٣ × ١ (د) ٦ عناصر

(٢) أب = $\begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ٦ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

ب أ = $\begin{pmatrix} -١٤ & ١٣ \\ -٨ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix}$

$أ^{مد}$ ب = $\begin{pmatrix} ٨ & ١١ \\ -١٠ & -١٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ -١ & -٢ \end{pmatrix}$

أ $ب^{مد}$ = $\begin{pmatrix} -١ & -٣ \\ ٤ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

$(أب)^{مد}$ = $\begin{pmatrix} ٧ & -١ \\ ٦ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & -١ \\ ٦ & ٧ \end{pmatrix}^{مد}$

$أ^{٢}$ = $\begin{pmatrix} ٠ & -٣ \\ -٣ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$

(٣) أب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١٠ \\ ٠ & ١٠ & ٠ \\ ١٠ & ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٧ & ٥ & -٢ \\ ٥ & -٥ & ١٠ \\ -٣ & ٥ & -٨ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ١ \\ ٤ & ٣ & -١ \end{pmatrix}$

= ١٠ $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$ = ١٠ $\mathbf{I}$

(٤) أب = $\begin{pmatrix} ٣+ص & ٢+س \\ ص & س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ص & س \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$

، ب أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ س+ص & س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ص & س \end{pmatrix}$

∵ $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ س+ص & س \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣+ص & ٢+س \\ ص & س \end{pmatrix}$ ∴ ٢ + س = ٢ ∴ س = ٠
، ٣ + ص = ٥ ∴ ص = ٢

(٥) $أ^{٢}$ = $\begin{pmatrix} ٨ & ١١ \\ ٢٧ & ١٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{pmatrix}$

، ب جـ = $\begin{pmatrix} -٩ & ٣ \\ -٣٥ & ٢٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٤ & -١ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ & ٤ & -٣ \\ ٧ & ٠ & ٩ \end{pmatrix}$

∴ $(ب جـ)^{مد}$ = $\begin{pmatrix} ٢٣ & ٣ \\ -٣٥ & -٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٩ & ٣ \\ -٣٥ & ٢٣ \end{pmatrix}^{مد}$

، ∵ ٢ س = $\begin{pmatrix} ٣١ & ١٤ \\ -٨ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٣ & ٣ \\ -٣٥ & -٩ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٨ & ١١ \\ ٢٧ & ١٦ \end{pmatrix}$

∴ س = $\begin{pmatrix} ١٥{,}٥ & ٧ \\ -٤ & ٣{,}٥ \end{pmatrix}$

تمارين (٤)

(١) (أ) ٢ س - (-٥) = ٠ ⇐ ٢ س = -٥ ∴ س = $-\frac{٥}{٢}$

(ب) ١١ س (٢ - س) - (٧) = ٤ ∴ ٢٢ س - ١١ $س^{٢}$ - ٧ - ٤ = ٠
∴ ٢٢ س - ١١ $س^{٢}$ - ١١ = ٠ ∴ $س^{٢}$ - ٢ س + ١ = ٠ ⇐ س = ١

(٢) $\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٣ \\ ١ & -٤ & ١ \\ ١ & ٢ & -٤ \end{vmatrix}$ = (٢ - ١٦) - (٦ + ١٢) + (-١٢ - ٣)
= -١٤ - ١٨ - ١٥ = -٤٧ ∴ Δ = $\frac{١}{٢}$ |-٤٧| = ٢٣,٥ وحدة مربعة

(٣) $\begin{vmatrix} ٤ & -١ & ١ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ٥ & -٧ & ١ \end{vmatrix} = (-٢١ - ٢٥) - (-٢٨ + ٥) + (٢٠ + ٣)$

$= -٤٦ + ٢٣ + ٢٣ =$ صفر $\Leftarrow$ النقط الثلاثة تقع على استقامة واحدة

(٤) (أ) ٣ س + ٤ ص = ١ ، −٥ س + ٧ ص = ١٢

$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ -٥ & ٧ \end{vmatrix} = ٢١ + ٢٠ = ٤١$ ، $\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ١٢ & ٧ \end{vmatrix} = ٧ - ٤٨ = -٤١$

، $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ -٥ & ١٢ \end{vmatrix} = ٣٦ + ٥ = ٤١$

$\therefore$ س $= \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-٤١}{٤١} = -١$ ، ص $= \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{٤١}{٤١} = ١$

(ب) ٣ س + ٢ ص + ع = ٨ ، ٢ س + ٠ − ٣ ع = ١٦ ، ٠ + ٥ ص + ٢ ع = ٧

$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٠ & -٣ \\ ٠ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} = -٥(-٩ - ٢) + ٢(٠ - ٤) = ٥٥ - ٨ = ٤٧$

، $\Delta_{س} = \begin{vmatrix} ٨ & ٢ & ١ \\ ١٦ & ٠ & -٣ \\ ٧ & ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ٧(-٦ - ٠) - ٥(-٢٤ - ١٦) + ٢(٠ - ٣٢)$

$= -٤٢ + ٢٠٠ - ٦٤ = ٩٤$

، $\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٣ & ٨ & ١ \\ ٢ & ١٦ & -٣ \\ ٠ & ٧ & ٢ \end{vmatrix} = -٧(-٩ - ٢) + ٢(٤٨ - ١٦)$

$= ٧٧ + ٦٤ = ١٤١$

، $\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٨ \\ ٢ & ٠ & ١٦ \\ ٠ & ٥ & ٧ \end{vmatrix} = -٥(٤٨ - ١٦) + ٧(٠ - ٤)$

$= -١٦٠ - ٢٨ = -١٨٨$

$\therefore$ س $= \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{٩٤}{٤٧} = ٢$ ، ص $= \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{١٤١}{٤٧} = ٣$ ، ع $= \frac{\Delta_{ع}}{\Delta} = \frac{-١٨٨}{٤٧} = -٤$

(٥) $\because$ المصفوفة ليس لها معكوس ضربي $\therefore \Delta = ٠$

$\therefore$ أ$^{٢} - ٨١ = ٠ \Leftarrow$ أ $= \pm ٩$

(٦) (أ) ٢ س − ٧ ص = ٣ ، س + ص = ٥

$\therefore$ أ $= \begin{pmatrix} ٢ & -٧ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ، س $= \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، ج $= \begin{pmatrix} ٣ \\ ٥ \end{pmatrix}$

، $\Delta = |$أ$| = \begin{vmatrix} ٢ & -٧ \\ ١ & ١ \end{vmatrix} = ٢ + ٧ = ٩$

$\therefore$ أ$^{-١} = \frac{١}{٩}\begin{pmatrix} ١ & ٧ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{٧}{٩} \\ \frac{-١}{٩} & \frac{٢}{٩} \end{pmatrix}$ ، $\because$ س = أ$^{-١}$ ج $\therefore$

$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٩} & \frac{٧}{٩} \\ \frac{-١}{٩} & \frac{٢}{٩} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ \\ ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٣٨}{٩} \\ \frac{٧}{٩} \end{pmatrix}$

$\therefore$ س $= \frac{٣٨}{٩}$ ، ص $= \frac{٧}{٩}$

(ب) أ $= \begin{pmatrix} ٢ & -٧ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$ ، س $= \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ، ج $= \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix}$

$\Delta = |$أ$| = \begin{vmatrix} ٢ & -٧ \\ ١ & -٣ \end{vmatrix} = -٦ + ٧ = ١$

، أ$^{-١} = \frac{١}{١}\begin{pmatrix} -٣ & ٧ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٧ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\because$ س = أ$^{-١}$ ج $\therefore$

$\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٣ & ٧ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$

$\therefore$ س = ٥ ، ص = ١

تمارين (٥)

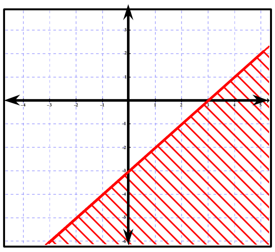
(١) ل : ٢ س − ٢ ص = ٦

س	٠	٣	.....
ص	−٣	٠	.....

خط متصل

النقطة (٠ ، ٠) ∌ منطقة الحل

∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة

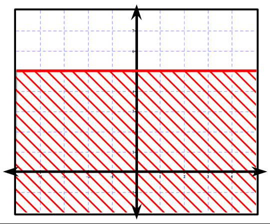


(٢) ل : ص = ٥

خط متصل يوازى محور السينات

النقطة (٠ ، ٠) ∈ منطقة الحل

∴ مجموعة الحل هى المستقيم ل ∪ نصف المستوى المظلل والذى تقع فيه نقطة الأصل.



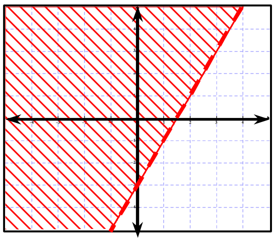
(٣) ل : ص = ٢ س − ٣

س	٠	٢	.....
ص	−٣	١	.....

خط متقطع

النقطة (٠ ، ٠) ∈ منطقة الحل

∴ مجموعة الحل هى المنطقة المظللة



(٤) $ل_{١}$: س = ٤ خط متصل

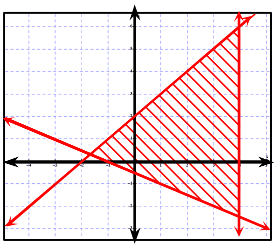
، $ل_{٢}$: ص = س + ٢ خط متقطع

س	٠	−٢	.....
ص	٢	٠	.....

، $ل_{٣}$: س + ٢ ص = −٢ خط متصل

س	٠	−٢	.....
ص	−١	٠	.....

مجموعة الحل تمثلها المنطقة المظللة.



(٥) $ل_{١}$: س + ٤ ص = ٤ خط متقطع

س	٠	٤	.....
ص	١	٠	.....

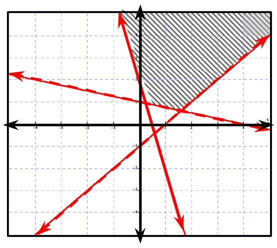
، $ل_{٢}$: ٤ س + ص = ٢ خط متصل

س	٠	١	.....
ص	٢	−٢	.....

، $ل_{٣}$: س − ص = ١ خط متقطع

س	٠	١	.....
ص	−١	٠	.....

مجموعة الحل تمثلها المنطقة المظللة.



(٦) $ل_{١}$: س + ص = ٥ خط متصل

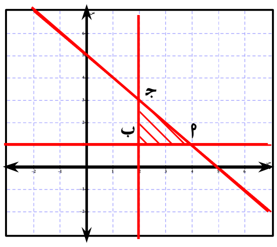
، $ل_{٢}$: ص = ١ ، $ل_{٣}$: س = ٢ متصلة

مجموعة الحل تمثلها المنطقة المظللة أ ب جـ

حيث : أ (٤ ، ١) ، ب (٢ ، ١)

، جـ (٢ ، ٣)

دالة الهدف : ر = ٢ س + ٣ ص



∴ $[ر]_{أ}$ = ٢ × ٤ + ٣ × ١ = ١١ ، $[ر]_{ب}$ = ٢ × ٢ ، ٣ × ١ = ٧

، $[ر]_{ج}$ = ٢ × ٢ + ٣ × ٣ = ١٣ ∴ ر أكبر ما يمكن عند ب (٢ ، ١).

(٧) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

وهذا يعنى أن مجموعة الحل فى الربع الأول

$ل_{١}$: ص + ٢ س = ١٠ خط متصل

س	٠	٥	.....
ص	١٠	٠	.....

$ل_{٢}$: س + ٤ ص = ١٢ خط متصل

س	٠	١٢	.....
ص	٣	٠	.....

مجموعة الحل تمثلها المنطقة المظللة و أ ب ج حيث : و (٠ ، ٠) ، أ (٥ ، ٠)

، ب (٤ ، ٢) ، ج (٠ ، ٣) دالة الهدف : ر = ٢ ص + ٥ س

∴ $[ر]_{و}$ = ٠ ، $[ر]_{أ}$ = ٥ × ٥ = ٢٥ ، $[ر]_{ب}$ = ٢ × ٢ + ٥ × ٤ = ٢٤

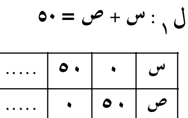
، $[ر]_{ج}$ = ٢ × ٣ = ٦ ∴ ر أكبر ما يمكن عند أ (٥ ، ٠).

(٨) بفرض عدد أسماك النوع (أ) = س ، عدد أسماك النوع (ب) = ص

(١) س + ص ≥ ٥٠ (٢) س ≤ ٣٠ (٣) ص ≤ ٣٥

، دالة الهدف : ر = ٤ س + ٣ ص أقل مايمكن

$ل_{١}$: س + ص = ٥٠



س	٠	٥٠	.....
ص	٥٠	٠	.....

$ل_{٢}$: س = ٣٠ ، $ل_{٣}$: ص = ٣٥

مجموعة الحل هى المنطقة المظللة أ ب ج

حيث : أ (٣٠ ، ٢٠) ، ب (٣٠ ، ٣٥)

، ج (١٥ ، ٣٥)

∵ دالة الهدف : ر = ٤ س + ٣ ص

∴ $[ر]_{أ}$ = ٤ × ٣٠ + ٣ × ٢٠ = ١٨٠ ، $[ر]_{ب}$ = ٤ × ٣٠ + ٣ × ٣٥ = ٢٢٥

، $[ر]_{ج}$ = ٤ × ١٥ + ٣ × ٣٥ = ١٦٥ ∴ ر أكبر ما يمكن عند ج (١٥ ، ٣٥).

∴ اقل ثمن للشراء هو ١٦٥ جنيه عند شراء ١٥ سمكة من النوع (أ) ، ٣٥ سمكة من النوع (ب).

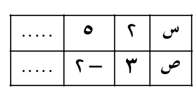
(٩) بفرض عدد الآلات من النوع الأول = س ، عدد الآلات من النوع الثانى = ص

∴ (١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ (٢) ٢٥ س + ١٥ ص ≤ ٩٥

(٣) ٤ س + ٨ ص ≤ ٣٢ ، دالة الهدف : ر = ٦٠ س + ٤٨ ص

$ل_{١}$: ٢٥ س + ١٥ ص = ٩٥ أى :

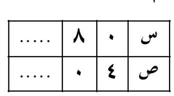
$ل_{١}$: ٥ س + ٣ ص = ١٩



س	٢	٥	.....
ص	٣	-٢	.....

$ل_{٢}$: ٤ س + ٨ ص = ٣٢ أى :

$ل_{٢}$: س + ٢ ص = ٨



س	٠	٨	.....
ص	٤	٠	.....

مجموعة الحل هى المنطقة المظللة و أ ب ج

حيث : و (٠ ، ٠) ، أ ($٣\frac{٤}{٥}$ ، ٠) ، ب (٢ ، ٣) ، ج (٠ ، ٤)

∵ دالة الهدف : ر = ٦٠ س + ٤٨ ص

∴ $[ر]_{و}$ = ٦٠ × ٠ + ٤٨ × ٠ = ٠ ، $[ر]_{أ}$ = ٦٠ × $٣\frac{٤}{٥}$ + ٤٨ × ٠ = ٢٢٨

، $[ر]_{ب}$ = ٦٠ × ٢ + ٤٨ × ٣ = ٢٦٤ ، $[ر]_{ج}$ = ٦٠ × ٠ + ٤٨ × ٤ = ١٩٢

∴ ر أكبر ما يمكن عند ب (٢ ، ٣).

∴ أكبر ربح هو ٢٦٤ جنيه عند انتاج ٢ من النوع (أ) ، ٣ من النوع (ب).

تمارين (٦)

(١) ٢ $\overrightarrow{أ}$ + ٣ $\overrightarrow{ب}$ = ٢ (٥ ، -٢) + ٣ (-٣ ، ٢) = (١٠ ، -٤) + (-٩ ، ٦)

= (١ ، ٢) ⇐ || ٢ $\overrightarrow{أ}$ + ٣ $\overrightarrow{ب}$ || = || (١ ، ٢) || = $\sqrt{١ + ٤}$ = $\sqrt{٥}$ وحدة طول

، $\overrightarrow{أ}$ - $\overrightarrow{ب}$ + ٢ $\overrightarrow{ج}$ = (٥ ، -٢) - (-٣ ، ٢) + (٨ ، ٠) = (١٦ ، -٤)

∴ || $\overrightarrow{أ}$ - $\overrightarrow{ب}$ + ٢ $\overrightarrow{ج}$ || = || (١٦ ، -٤) || = $\sqrt{٢٥٦ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٧٢}$

= ٤ $\sqrt{١٧}$ وحدة طول

(٢) (١) (٦ ، ٣ س) + (٢ ص ، ٤) = (٠ ، ٢)

∴ (٦ + ٢ ص ، ٣ س + ٤) = (٠ ، ٢) ⇐ ٦ + ٢ ص = ٠ ∴ ص = -٣

، ٣ س + ٤ = ٢ ∴ ٣ س = ٢ - ٤ ∴ ٣ س = -٢ ∴ س = $-\frac{٢}{٣}$

(٢) (٣ س ، س ص) = (٦ ، ٦) ⇐ ٣ س = ٦ ∴ س = ٢

، س ص = ٦ ∴ ٢ ص = ٦ ∴ ص = ٣

(٣) س - ٢ = ٤ ∴ س = ٦ ، ٢ س - ص = ٥ ∴ ١٢ - ص = ٥ ∴ ص = ٧

(٣) ∵ $\overrightarrow{أ}$ = ٣ $\overrightarrow{ب}$ ∴ (م ، ٣) = (٩ ، ٣ ن) ⇐ م = ٩ ، ن = ١

(٤) ∵ $\overrightarrow{أ}$ // $\overrightarrow{ب}$ ∴ $\frac{٣}{م}$ = $\frac{٦}{٣}$ = $\frac{٢}{١}$ ∴ ٢ م = ٣ ∴ م = $\frac{٣}{٢}$

(٥) ∵ $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$ ∴ $م_{١}$ × $م_{٢}$ = -١ ∴ $\frac{٢}{٣}$ × $\frac{م}{٢}$ = -١ ∴ م = -٣

حل آخر : ∵ $\overrightarrow{أ}$ ⊥ $\overrightarrow{ب}$ ∴ $\overrightarrow{ب}$ = (٢ ، -٣) ⇐ م = -٣

(٦) ٢ $\overrightarrow{ء}$ = (١٠ ، -٤) + (٩ ، -٦) + (٨ ، ٠) = (٢٧ ، -١٠)

∴ $\overrightarrow{ء}$ = ($١٣\frac{١}{٢}$ ، -٥)

(٧) (أ) || $\overrightarrow{أ}$ || = $\sqrt{(٢)^٢ + (٢\sqrt{٣})^٢}$ = $\sqrt{٤ + ١٢}$ = $\sqrt{١٦}$ = ٤

، ظا θ = $\frac{٢\sqrt{٣}}{٢}$ = $\sqrt{٣}$ ∴ θ = ٦٠° ⇐ $\overrightarrow{أ}$ = (٤ ، ٦٠°)

(ب) || $\overrightarrow{ب}$ || = $\sqrt{٩٨ + ٩٨}$ = $\sqrt{١٩٦}$ = ١٤ ، ظا θ = ١ ∴ θ = ٤٥°

⇐ $\overrightarrow{ب}$ = (١٤ ، ٤٥°)

(٨) (أ) الصورة القطبية = (٣٧ ، ٩٠°)

الصورة الاحداثية = (٣٧ جتا ٩٠ ، ٣٧ جا ٩٠) = (٠ ، ٣٧) = ٣٧ $\overrightarrow{ص}$

(ب) الصورة القطبية = (٦٠ ، ٣٠°)

الصورة الإحداثية = (٦٠ جتا ٣٠ ، ٦٠ جا ٣٠) = (٣٠$\sqrt{٣}$ ، ٣٠)

= ٣٠$\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{س}$ + ٣٠ $\overrightarrow{ص}$

(ج) الصورة القطبية = (٤٠ ، ٣٣٠°)

الصورة الإحداثية = (٤٠ جتا ٣٣٠ ، ٤٠ جا ٣٣٠) = (٢٠$\sqrt{٣}$ ، -٢٠)

= ٢٠$\sqrt{٣}$ $\overrightarrow{س}$ - ٢٠ $\overrightarrow{ص}$

تمارين (٧)

(١) ح⃗ = ق⃗١ + ق⃗٢ + ق⃗٣ = (٠ + ٣ + ٢) س⃗ + (٦ + ١٣ − ٧) ص⃗

= ٥ س⃗ + ١٢ ص⃗ ⇐ ح = ‖ح⃗‖ = √(٢٥ + ١٤٤) = √١٦٩ = ١٣ نيوتن

، ظا θ = ص/س = ١٢/٥ ، ∵ س > ٠ ، ص > ٠ ∴ θ ∈ الربع الأول

∴ θ = ظا$^{-1}$ (١٢/٥) = ٢٣′ ٦٧°

(٢) (أ) ع⃗ب أ = ع⃗ب − ع⃗أ = ٩٠ ى⃗ − ٧٠ ى⃗ = ٢٠ ى⃗

(ب) ع⃗أ ب = ع⃗أ − ع⃗ب = ٧٠ ى⃗ − ٩٠ ى⃗ = −٢٠ ى⃗

(جـ) ∵ ع⃗أ ب = ع⃗أ − ع⃗ب ∴ −٢٠ ى⃗ = −٩٠ ى⃗ − ع⃗ب

⇐ ع⃗ب = −٩٠ ى⃗ + ٢٠ ى⃗ = −٧٠ ى⃗

(٣) بفرض سرعة السيارة (أ) = ١٤٠ ى⃗ ∴ سرعة السيارة (ب) = −١١٠ ى⃗

سرعة السيارة (ب) بالنسبة للسيارة (ا) = ع⃗ب أ = ع⃗ب − ع⃗أ

= −١١٠ ى⃗ −١٤٠ ى⃗ = −٢٥٠ ى⃗ أى أن السيارة (ب) تسير بسرعة ٢٥٠ كم / س في الاتجاه المضاد لحركة السيارة (أ) .

(٤) ح⃗ = ق⃗١ + ق⃗٢ + ق⃗٣ = (٧ + أ − ٤) س⃗ + (−٥ + ٣ + ب − ٣) ص⃗

∴ ح⃗ = (٣ + أ) س⃗ + (ب − ٥) ص⃗

(أولاً) (٣ + أ) س⃗ + (ب − ٥) ص⃗ = ٤ س⃗ − ٧ ص⃗

⇐ ٣ + أ = ٤ ∴ أ = ١ ، ب − ٥ = −٧ ∴ ب = −٢

(ثانياً) ∵ القوى متزنة ∴ ح⃗ = ٠⃗ ∴ (٣ + أ) س⃗ + (ب − ٥) ص⃗ = ٠⃗

∴ ٣ + أ = ٠ ⇐ أ = −٣ ، ب − ٥ = ٠ ⇐ ب = ٥

(٥) (أ) ب⃗ − ٢أ⃗ = (٦ ، ١) + (−٤ ، ٦) = (٢ ، ٧) = ٢ س⃗ + ٧ ص⃗

(ب) ∵ أ⃗ // ب⃗ ∴ ٦/−٣ = ٧ك/٧ ⇐ ك = −٢

(جـ) ∵ أ⃗ب = ب⃗ − أ⃗

∴ ب⃗ = أ⃗ب + أ⃗ = (٦ ، ٦) + (٣ ، ١) = (٩ ، ٧)

(ء) أ⃗ب = ب⃗ − أ⃗ = (−٣ ، ٠) + (−٣ ، −٨) = (−٦ ، −٨)

∴ ‖أ⃗ب‖ = ‖(−٦ ، −٨)‖ = √(٣٦ + ٦٤) = √١٠٠ = ١٠ وحدات طول

(٦) أ⃗ء = ء⃗ − أ⃗ = (١ ، ك) − (٢ ، ٢) = (−١ ، ك − ٢)

، ب⃗جـ = جـ⃗ − ب⃗ = (−٢ ، ٠) − (٤ ، −٢) = (−٦ ، ٢)

∵ أ⃗ء ⊥ ب⃗جـ ∴ (ك − ٢)/−١ × ٢/−٦ = −١ ∴ ك − ٢ = −٣ ∴ ك = −١

(٧) ٥ أ⃗جـ = ٥ (أ⃗ء + ء⃗جـ) = ٥ أ⃗ء + ٥ ء⃗جـ

، ٣ أ⃗ب = ٣ (أ⃗ء + ء⃗ب) = ٣ أ⃗ء + ٣ ء⃗ب

بالجمع :

∴ ٥ أ⃗جـ + ٣ أ⃗ب = ٨ أ⃗ء + ٥ ء⃗جـ + ٣ ء⃗ب

= ٨ أ⃗ء + ٣ ب⃗ء − ٣ ب⃗ء = ٨ أ⃗ء

(٨) (١) ∵ أ ب جـ ء مستطيل ∴ ب⃗أ ⊥ ب⃗جـ

ب⃗أ = أ⃗ − ب⃗ = (−١ ، −٢) − (٥ ، ١) = (−٦ ، −٣) = −٣ (٢ ، ١)

، ب⃗جـ = جـ⃗ − ب⃗ = (٣ ، ك) − (٥ ، ١) = (−٢ ، ك − ١) = −(٢ ، ١ − ك)

∴ م١ × م٢ = −١ ∴ ١/٢ × (١ − ك)/٢ = −١ ⇐ ١ − ك = −٤ ∴ ك = ٥

(٢) ∵ أ ب جـ ء مستطيل ∴ أ⃗ب = ء⃗جـ ∴ ب⃗ − أ⃗ = جـ⃗ − ء⃗

∴ ء⃗ = جـ⃗ − ب⃗ + أ⃗ = (٣ ، ٥) + (−٥ ، −١) + (−١ ، −٢) = (−٣ ، ٢)

تمارين (٨)

(١) (أ) التقسيم من الخارج

(ب) التقسيم من الداخل

(جـ) منتصف أب = (أ + ب)/٢ = [(٢ ، −٥) + (٦ ، ٣)]/٢ = (٨ ، −٢)/٢ = (٤ ، −١)

(ء) ∵ جـ = (أ + ب)/٢ ∴ ٢ جـ = أ + ب

∴ ب = ٢ جـ − أ = (٦ ، ١٢) − (−٣ ، ٧) = (٩ ، ٥)

(٢) (أ) ل٢/ل١ = −٣/٢ لأن التقسيم من الخارج

∴ جـ = (ل١ أ + ل٢ ب)/(ل١ + ل٢) = [−٣ (٢ ، ٥) + ٢ (٧ ، −١)]/(−٣ + ٢) = [(−٦ ، −١٥) + (١٤ ، −٢)]/−١

= (٨ ، −١٧)/−١ = (−٨ ، ١٧)

(ب) ل٢/ل١ = ٤/٣ ∴ ء = [٤ (٢ ، ٥) + ٣ (٧ ، −١)]/(٤ + ٣) = [(٨ ، ٢٠) + (٢١ ، −٣)]/٧

= (٢٩ ، ١٧)/٧ = (٢٩/٧ ، ١٧/٧)

(٣) أ⃗ب = ب⃗ − أ⃗ = (٥ ، ٢) − (٢ ، ٥) = (٣ ، −٣) = ٣ (١ ، −١)

أ⃗جـ = جـ⃗ − أ⃗ = (٤ ، ٣) − (٢ ، ٥) = (٢ ، −٢) = ٢ (١ ، −١)

∴ أ⃗ب = ٣/٢ أ⃗جـ ⇐ أ ، ب ، جـ ∈ مستقيم واحد

، ب ، جـ فى جهة واحدة من أ .

حل آخر للجزء الأول :

اب = √((٥ − ٢)^2 + (٢ − ٥)^2) = √(٩ + ٩) = ٣ √٢

اجـ = √((٤ − ٢)^2 + (٣ − ٥)^2) = √(٤ + ٤) = ٢ √٢

ب جـ = √((٥ − ٤)^2 + (٢ − ٣)^2) = √(١ + ١) = √٢

∴ أب = أ جـ + ب جـ ⇐ أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة

ثانياً : بفرض نسبة التقسيم = ل٢/ل١ ∴ (٤ ، ٣) = [ل١ (٢ ، ٥) + ل٢ (٥ ، ٢)]/(ل١ + ل٢)

∴ ٤ = (٢ل١ + ٥ل٢)/(ل١ + ل٢) ∴ ٢ ل١ + ٥ ل٢ = ٤ ل١ + ٤ ل٢ ∴ ل٢ = ٢ ل١

∴ ل٢/ل١ = ٢/١ ∴ جـ تقسم أ⃗ب من الداخل بنسبة ٢ : ١

(٤) بفرض النقطتين هما جـ ، ء

∵ جـ تقسم اب ثم بنسبة ل٢/ل١ = ١/٢

∴ جـ⃗ = [٢ (٨ ، −٤) + ١ (−١ ، ٢)]/(١ + ٢) = (٥ ، −٢)

، ∵ ء منتصف جـ⃗ب ∴ ء = [(٥ ، −٢) + (−١ ، ٢)]/٢ = (٢ ، ٠)

تمارين (٩)

(١) (أ) ميله = ١ ومتجه اتجاهه = (١ ، ١) وميل العمودى = −١

(ب) ميل المستقيم = −٥/٢ ، ومتجه اتجاهه = (٢ ، −٥) ، ومتجه العمودى = (٥ ، ٢)

(جـ) شرط التوازى هو م١ = م٢ ، وشرط التعامد هو م١ × م٢ = −١

(ء) يمر بالنقطة (٣ ، ٢) ، ومتجه اتجاهه = (٢ ، −٥)

(هـ) ∵ النقط على استقامة واحدة ∴ م١ = م٢

∴ (ص − ١)/(٢ − ٤) = (٧ − ص)/(٧ − ٢) ∴ (ص − ١)/(−٢) = (٧ − ص)/٥ ∴ ٥ص − ٥ = −١٤ + ٢ص

∴ ٣ص = ٩ ⇐ ص = ٣

(و) الميل = − معامل س / معامل ص ∴ (٥أ − ١)/(٣أ) = ٢ ∴ ٦أ = ٥أ − ١ ⇐ أ = −١

(٢) (أ) متجه اتجاه المستقيم = (٣ ، ٠) − (٠ ، −٥) = (٣ ، ٥)

المعادلة المتجهة : ر→ = (٣ ، ٠) + ك (٣ ، ٥)

المعادلتان البارامتريان : س = ٣ + ٣ك ، ص = ٥ك

المعادلة الكارتيزية : ص − ص١ = م (س − س١) أى : ص = ٥/٣ (س − ٣)

∴ ٣ص = ٥س − ١٥ أى : ٥س − ٣ص − ١٥ = ٠ (المعادلة العامة)

(ب) المعادلة المتجهة : ر→ = (٢ ، ١) + ك (−٢ ، ٣)

المعادلتان البارامتريان : س = ٢ − ٢ك ، ص = ١ + ٣ك

المعادلة الكارتيزية : ص − ص١ = م (س − س١) أى : ص − ١ = −٣/٢ (س − ٢)

∴ ٢ص − ٢ = −٣س + ٦ أى : ٣س + ٢ص − ٨ = ٠ (المعادلة العامة)

(جـ) المعادلة المتجهة : ر→ = (٢ ، ١) + ك (−١ ، ٢)

المعادلتان البارامتريان : س = ٢ − ك ، ص = ١ + ٢ك

المعادلة الكارتيزية : ص − ص١ = م (س − س١) أى : ص + ١ = −٢ (س − ٢)

∴ ص + ١ = −٢س + ٤ أى : ٢س + ص − ٣ = ٠ (المعادلة العامة)

(ء) بحل المعادلتين جبرياً نجد أن : س = ٢ ، ص = ٣ ∴ نقطة التقاطع (٢ ، ٣)

المعادلة المتجهة : ر→ = (٢ ، ٣) + ك (−١ ، ٨)

المعادلتان البارامتريان : س = ٢ − ك ، ص = ٣ + ٨ك

المعادلة الكارتيزية : ص − ص١ = م (س − س١) أى : ص − ٣ = −٨ (س − ٢)

∴ ص − ٣ = −٨س + ١٦ أى : ٨س + ص − ١٩ = ٠ (المعادلة العامة)

تمارين (١٠)

(١) ∵ م١ = −٢/٣ ، م٢ = −٣ ∴ ظا θ = |(م١ − م٢)/(١ + م١ م٢)| = |(−٢/٣ + ٣)/(١ − −٢/٣ (−٣))|

= |(٧/٣)/(١ − ٢)| = ٧/٣ ∴ θ = ظا⁻¹ (٧/٣) = ٦٦° ٤٨′

(٢) ∵ ل = |أ س١ + ب ص١ + جـ| / √(أ² + ب²) ∴ √١٣ = |٣(س) − ٢(١) + ٥| / √((٣)² + (−٢)²)

∴ √١٣ = |٣س + ٣| / √١٣ ∴ ١٣ = |٣س + ٣| ∴ ٣س + ٣ = ± ١٣

إما ٣س + ٣ = ١٣ ∴ ٣س = ١٠ ⇐ س = ١٠/٣

أ، ٣س + ٣ = −١٣ ∴ ٣س = −١٦ ⇐ س = −١٦/٣

(٣) معادلة المستقيم هى : (س + ١)/١ = (ص − ١)/٢ أى : ٢س − ص + ٣ = ٠

النقطة (−٢ ، ٣) : المقدار = ٢(−٢) − ٣ + ٣ = −٤

النقطة (١ ، ١) : المقدار = ٢(١) − ١ + ٣ = ٤

المقدار يختلف فى إشارتيه ∴ النقطتان تقعان فى جهتين مختلفتين من المستقيم

ل١ = |٢(−٢) − ٣ + ٣| / √((٢)² + (−١)²) = |−٤| / √٥ = ٤/٥ √٥

، ل٢ = |٢(١) − ١ + ٣| / √((٢)² + (−١)²) = |٤| / √٥ = ٤/٥ √٥ ⇐ ل١ = ل٢

(٤) ∵ م١ = −١/ك ، م٢ = −٢/١ ∴ ظا θ = |(م١ − م٢)/(١ + م١ م٢)|

∴ ٣/٤ = |(−١/ك + ٢)/(١ + −١/ك × −٢/١)| إ ٣/٤ = |(٢ك − ١)/(ك + ٢)| ∴ (٢ك − ١)/(ك + ٢) = ± ٣/٤

إما (٢ك − ١)/(ك + ٢) = ٣/٤ ⇐ ٨ك − ٤ = ٣ك + ٦ ∴ ٥ك = ١٠ ∴ ك = ٢

أ، (٢ك − ١)/(ك + ٢) = −٣/٤ ⇐ ٨ك − ٤ = −٣ك − ٦ ∴ ١١ك = −٢ ∴ ك = −٢/١١

(٥) أولاً : نحدد نوع زوايا المثلث بواسطة إيجاد أطوال الأضلاع الثلاثة .

(أ ب)² = (٢ + ٢)² + (−٤ + ١)² = ٢٥ وحدة طول

، (ب جـ)² = (٤ − ٢)² + (٧ + ٤)² = ١٢٥ وحدات طول

، (أ جـ)² = (٤ + ٢)² + (٧ + ١)² = ١٠٠ وحدة طول

، ∵ (ب جـ)² = (أ ب)² + (أ جـ)² ∴ △ أ ب جـ قائم الزاوية فى أ .

ثانياً : نوجد قياسات زوايا المثلث .

ميل أ ب↔ = (−١ + ٤)/(−٢ − ٢) = −٣/٤ ، ميل ب جـ↔ = (٧ + ٤)/(٤ − ٢) = ١١/٢

، ميل أ جـ↔ = (٧ + ١)/(٤ + ٢) = ٤/٣

ظا ب = |(١١/٢ − −٣/٤)/(١ + ١١/٢ × −٣/٤)| = ٢ ∴ ق(∠ب) = ٦٣° ٢٦′

∴ ق(∠جـ) = ٩٠ − ٦٣° ٢٦′ = ٢٦° ٣٤′

، مساحة △ أ ب جـ = ١/٢ × ٥ × ١٠ = ٢٥ وحدة مربعة

ملحوظة هامة : إذا كان المثلث منفرج الزاوية فى أ : نحسب قياسات الزاويتين الحادتين ∠ب ، ∠جـ باستخدام القانون ثم نحسب الزاوية المنفرجة أ بطرح مجموع قياساهما من ١٨٠° وتكون المساحة = ١/٢ × أ′ × ب′ × جا جـ .

(٦) م١ = ٢/٥ ، م٢ = ٢/٥ ، ∵ م١ = م٢ ∴ المستقيمان متوازيان

بفرض س = ٠ ⇐ ص = ٢ ∴ النقطة (٠ ، ٢) ∈ المستقيم الأول

البعد بين المستقيمين = |−٢(٠) + ٥(٢) + ١٩| / √((−٢)² + (٥)²) = √٢٩ وحدة طول

تمارين (١١)

(١) أ١ س + ب١ ص + جـ١ + ك (أ٢ س + ب٢ ص + جـ٢) = ٠

∴ ٢س + ص − ٥ + ك (س − ص − ١) = ٠ ، عند (٥ ، ٣)

∴ ٢(٥) + ٣ − ٥ + ك (٥ − ٣ − ١) = ٠ ⇐ ٨ + ك = ٠ ∴ ك = −٨

∴ المعادلة المطلوبة هى : ٢س + ص − ٥ − ٨ (س − ص − ١) = ٠

أى : ٢س + ص − ٥ − ٨س + ٨ص + ٨ = ٠ أى : ٦س − ٩ص − ٣ = ٠

أى : ٢س − ٣ص − ١ = ٠

(٢) ٢س + ٣ص − ٥ + ك (س + ٣ص − ٧) = ٠ ، عند (٢ ، ٤)

∴ ٢(٢) + ٣(٤) − ٥ + ك (٢ + ٣ × ٤ − ٧) = ٠

⇐ ٤ + ١٢ − ٥ + ك (٢ + ١٢ − ٧) = ٠ ∴ ١١ + ٧ك = ٠ ⇐ ك = −١١/٧

∴ المعادلة المطلوبة هى : ٢س + ٣ص − ٥ − ١١/٧ (س + ٣ص − ٧) = ٠

أى : ١٤س + ٢١ص − ٣٥ − ١١س − ٣٣ص + ٧٧ = ٠

أى : ٣س − ١٢ص + ٤٢ = ٠ أى : س − ٤ص + ١٤ = ٠

(٣) م١ = ٢/٣ ، م٢ = −٣/٢ ، ∵ م١ × م٢ = ٢/٣ × −٣/٢ = −١

∴ المستقيمان متقاطعان على التعامد : ل١ : ٢ س – ٣ ص + ٤ = ٠

، ل٢ : (س – ١)/(–٢) = (ص – ٢)/٣ أى : ٣ س – ٣ = –٢ ص + ٤ أى :

٣ س + ٢ ص – ٧ = ٠ وبحل المعادلتين معاً نجد أن نقطة التقاطع هى (١ ، ٢)

(٤) بحل المعادلتين جبرياً نجد أن نقطة التقاطع هى (١ ، ٢)

∴ ميل المستقيم المار بالنقطتين : (١ ، ٢) ، (٣ ، ١) = (٢ – ١)/(١ – ٣) = –١/٢

∴ المعادلة المتجهة له هى : ر→ = (٣ ، ١) + ك (٢ ، –١)

(٥) ل١ : س/(–٣) = ص/٢ أى : ٢ س + ٣ ص = ٠ ، ل٢ : ٣ س – ٢ ص = ١٣

وبحل المعادلتين معاً نجد أن نقطة التقاطع هى (٣ ، –٢) ، ∵ المستقيم // محور الصادات ∴ ميله غير معرف ∴ معادلته هى : س – ٣ = ٠

تمارين (١٢)

(١) المقدار = جا θ قتا θ = جا θ × ١/جا θ = ١

(٢) المقدار = ١ – (١ – جا² θ) = ١ – ١ + جا² θ = جا² θ

(٣) المقدار = جتا² θ × ١/جتا θ × ١/جا θ = جتا θ/جا θ = ظتا θ

(٤) المقدار = جا θ جتا θ × جا θ/جتا θ = جا² θ

(٥) المقدار = جتا θ جتا θ – (–جا θ) جا θ = جتا² θ + جا² θ = ١

(٦) الطرف الأيمن = جا² θ + جا² θ + جتا² θ = جا² θ + ١ = الطرف الأيسر

(٧) الطرف الأيمن = جتا θ جتا θ = جتا² θ = ١ – جا² θ = الطرف الأيسر

(٨) الطرف الأيمن = جتا θ + جا θ × جا θ/جتا θ = (جتا² θ + جا² θ)/جتا θ = ١/جتا θ = قا θ

(٩) الطرف الأيمن = ١/جتا θ – جا θ × جا θ/جتا θ = (١ – جا² θ)/جتا θ = جتا² θ/جتا θ = جتا θ

تمارين (١٣)

(١) ∵ قا θ = √٢ ∴ جتا θ = ١/√٢ (موجبة)

∴ θ ∈ الربع الأول أو الرابع ∴ θ = ٤٥° أ، θ = ٣٦٠ – ٤٥ = ٣١٥ = –٤٥°

∴ θ = ٤٥° + ٢ ن π أ، θ = –٤٥° + ٢ ن π

∴ الحل العام هو : θ = ± ٤٥° + ٢ ن π

(٢) ∵ قتا θ = –٢ ∴ جا θ = –١/٢ (سالبة)

∴ θ ∈ الربع الثالث أو الرابع

∴ θ = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠° أ، θ = ٣٦٠ – ٣٠ = ٣٣٠°

∴ الحل العام هو : θ = ٢١٠° + ٢ ن π أ، θ = ٣٣٠° + ٢ ن π

(٣) ∵ ظا θ = –١ (سالبة) ∴ θ ∈ الربع الثانى أو الرابع

∴ θ = ١٨٠ – ٤٥ = ١٣٥° أ، θ = ٣٦٠ – ٤٥ = ٣١٥°

∴ الحل العام هو : θ = ١٣٥° + ٢ ن π أ، θ = ٣١٥° + ٢ ن π

ويمكن كتابة الحل على الصورة : ١٣٥° + ن π

(٤) ∵ √٢ جا θ جتا θ – جا θ = ٠ ∴ جا θ (√٢ جتا θ – ١) = ٠

∴ جا θ = ٠ ⇐ θ = ٠° أ، θ = ١٨٠° ∴ θ = ن π

أ، √٢ جتا θ – ١ = ٠ ∴ جتا θ = ١/√٢ (موجبة)

∴ θ ∈ الربع الأول أو الرابع ∴ θ = ٤٥° أ، θ = ٣٦٠ – ٤٥ = ٣١٥ = –٤٥°

∴ θ = ± ٤٥° + ٢ ن π ∴ الحل العام هو : ن π أ، ± ٤٥° + ٢ ن π

(٥) ٢ جا θ = ١ ⇐ جا θ = ١/٢ (موجبة) ∴ θ ∈ الربع الأول أو الثانى

∴ θ = ٣٠° أ، θ = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠°

∴ الحل العام هو : ٣٠° + ٢ ن π أ، ٢١٠° + ٢ ن π

(٦) جا θ = جتا θ ∴ ظا θ = ١ (موجب) ⇐ θ ∈ الربع الأول أو الثالث

∴ θ = ٤٥° أ، θ = ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥° ∴ مجموعة الحل = { ٤٥° ، ٢٢٥° }

(٧) جا θ = ٢ جتا θ ∴ ظا θ = ٢ (موجب) ⇐ θ ∈ الربع الأول أو الثالث

∴ θ = ٦٣° ٢٦′ أ، θ = ١٨٠ + ٦٣° ٢٦′ = ٢٤٣° ٢٦′

∴ مجموعة الحل = { ٦٣° ٢٦′ ، ٢٤٣° ٢٦′ }

(٨) √٢ جتا θ = –٢

∴ جتا θ = –√٢ = –١,٤ (مرفوض لأن –١ ≤ جتا θ ≤ ١)

∴ مجموعة الحل = ∅

(٩) جا θ = –٣/٤ (سالب) ⇐ θ ∈ الربع الثالث أو الرابع

∴ θ = ١٨٠ + ٤٨° ٣٥′ = ٢٢٨° ٣٥′

أ، θ = ٣٦٠ – ٤٨° ٣٥′ = ٣١١° ٢٥′

∴ مجموعة الحل = { ٢٢٨° ٣٥′ ، ٣١١° ٢٥′ }

(١٠) (٢ جا θ – ١)(جا θ – ٢) = ٠

إما ٢ جا θ – ١ = ٠ ∴ ٢ جا θ = ١ ∴ جا θ = ١/٢ (موجب)

⇐ θ ∈ الربع الأول أو الثانى ∴ θ = ٣٠° أ، θ = ١٨٠ – ٣٠ = ١٥٠°

أ، جا θ = ٢ (مرفوض لأن –١ ≤ جا θ ≤ ١)

∴ مجموعة الحل = { ٣٠° ، ١٥٠° }

تمارين (١٤)

(١) أ جـ = √(١٦ + ٣٦) = √٥٢ = ٢√١٣ ≈ ٧ سم

، ظا ∠جـ = ٤/٦ ⇐ ق(∠جـ) = ظا⁻¹(٤/٦) = ٣٣,٦٩ = ٣٤°

⇐ ق(∠أ) = ٩٠ – ٣٤ = ٥٦°

(٢) أ جـ = √((١٢,٥)² + (١٧,٦)²) = ٢٢ سم

، ظا ∠جـ = ١٢,٥/١٧,٦ ⇐

ق(∠جـ) = ظا⁻¹(١٢,٥/١٧,٦) = ٣٥,٣٨ = ٣٥°

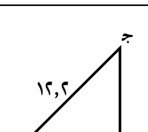
⇐ ق(∠أ) = ٩٠ – ٣٥ = ٥٥°

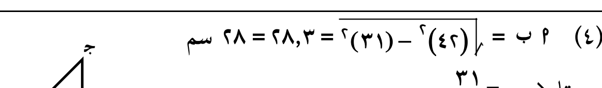
(٣) ب جـ = √((١٢,٢)² – (٥,٣)²) = ١١,٣٢ = ١١ سم

، جا ∠جـ = ٥,٣/١٢,٢ ⇐

ق(∠جـ) = جا⁻¹(٥,٣/١٢,٢) = ٢٥,٧ = ٢٦°

⇐ ق(∠أ) = ٩٠ – ٢٦ = ٦٤°



(٤)

أ ب = √((٤٢)² – (٣١)²) = ٢٨,٣ = ٢٨ سم

، جتا ∠جـ = ٣١/٤٢

⇐ ق(∠ج) = جتا$^{-1}$ (٣١/٤٢) = ٤٢,٤٣ = ٤٢°

⇐ ق(^أ) = ٩٠ − ٤٢ = ٤٨°

(٥) ق(^أ) = ٩٠ − ٦٢ = ٢٨°

، أب/٧٦ = جا ٦٢ ⇐ أب = ٧٦ جا ٦٢ = ٦٧,١ = ٦٧ سم

، ب ج/٧٦ = جتا ٦٢ ⇐ ب ج = ٧٦ جتا ٦٢ = ٣٥,٦٧ = ٣٦ سم

• في المسائل: (٦)، (٧)، (٨) يتم تحويل الآلة الحاسبة إلى نظام الراديان :

SHIFT MODE 4

(٦) ق(^ب) = π/٢ − ٠,٩٢٥^ء = ٠,٦٤٥٧٩٦^ء = ٠,٦٤٦^ء

، ٨/أب = ظا ∠أ ∴ أب ظا ٠,٩٢٥^ء = ٨

∴ أب = ٨/ظا ٠,٩٢٥^ء = ٦,٠٢٨٧ = ٦,٠٢٩ سم

، ٨/أج = جا ∠أ ∴ أج جا ٠,٩٢٥^ء = ٨ ∴ أج = ٨/جا ٠,٩٢٥^ء = ١٠,٠١٧ سم

(٧) ق(^ب) = π/٢ − ١,١٦٩^ء = ٠,٤٠١٧٩٦^ء = ٠,٤٠٢^ء

، ب ج/١٨ = ظا ∠أ

∴ ب ج = ١٨ ظا ١,١٦٩^ء = ٤٢,٣٦١٦٨٦ = ٤٢,٣٦٢

، ١٨/أج = جتا ∠أ ∴ أج جتا ١,١٦٩^ء = ١٨

∴ أج = ١٨/جتا ١,١٦٩^ء = ١٩,٥٥٧٥٦ = ١٩,٥٥٨ سم

(٨) ق(^ب) = π/٢ − ١,٠٨٢^ء = ٠,٤٨٨٧٩٦^ء = ٠,٤٨٩^ء

، أب/٣٥,٨ = جتا ∠أ

∴ أب = ٣٥,٨ جتا ١,٠٨٢^ء = ١٦,٨١ سم

، ب ج/٣٥,٨ = جا ∠أ ∴ ب ج = ٣٥,٨ جا ١,٠٨٢^ء = ٣١,٦٠٧٧٧ = ٣١,٦٠٨ سم

(٩) في △ أب ء القائم في ء :

٦/ب ء = ظا ٥٢ ⇐ ب ء ظا ٥٢ = ٦

∴ ب ء = ٦/ظا ٥٢ = ٤,٦٨٧٧ = ٤,٧ سم

في △ أج ء القائم في ء : ٦/ج ء = ظا ٢٨ ⇐ ج ء ظا ٢٨ = ٦

⇐ ج ء = ٦/ظا ٢٨ = ١١,٣ سم ∴ ب ج = ب ء + ج ء = ٤,٧ + ١١,٣ = ١٦ سم

(١٠) نرسم مء ⊥ أب فينصفه

، ق(أمء) = ١١٠/٢ = ٥٥°

في △ أمء القائم في ء : ∵ أء/٧ = جا ٥٥

∴ أء = ٧ جا ٥٥ = ٥,٧٣٤٠٦ سم

⇐ أب = ٢ × ٥,٧٣٤٠٦ = ١١,٤٦٨١٢ = ١١,٤٦٨ سم

تمارين (١٥)

(١) شكل (١) : ∵ ب ج/٦ = ظا ٣٠ ∴ ب ج = ٦ ظا ٣٠ = ٢√٣ سم

شكل (٢) : ∵ ٥/ب ج = ظا ٣٠ ∴ ب ج × ظا ٣٠ = ٥ ∴ ب ج = ٥/ظا ٣٠ = ٥√٣

شكل (٣) : ∵ ب ج/٨ = جتا ٣٠ ∴ ب ج = ٨ جتا ٣٠ = ٤√٣ سم

(٢) شكل (١) : ∵ ٩/٧ = ظا ^ج ∴ ق(^ج) = ظا$^{-1}$ (٩/٧) = ٥٢° ٨′

شكل (٢) : ∵ ٥/٨ = جا ^ج ∴ ق(^ج) = جا$^{-1}$ (٥/٨) = ٣٨° ٤١′

شكل (٣) : ∵ ٦/٨ = جتا ^ج ∴ ق(^ج) = جتا$^{-1}$ (٦/٨) = ٤١° ٢٥′

(٣) ارتفاع المئذنة = ب ج

، بُعد الرجل عن قمة المئذنة = أج

∵ ب ج/٢٤ = ظا ٤٥ = ١ ⇐ ب ج = ٢٤ متر

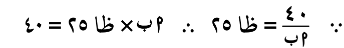
، ∵ ٢٤/أج = جتا ٤٥ ∴ أج × جتا ٤٥ = ٢٤

ومنها أج = ٢٤/جتا ٤٥ = ٢٤√٢ متراً

(٤) بُعد الجسم عن قاعدة البرج = أب

ق(^أ) = ٢٥ بالتبادل

في △ أب ج القائم في ب :



∵ ٤٠/أب = ظا ٢٥ ∴ أب × ظا ٢٥ = ٤٠

∴ أب = ٤٠/ظا ٢٥ = ٨٥,٧٨ متراً

تمارين (١٦)

(١) مساحة القطاع = ١/٢ ل نق = ١/٢ × ١٦ × ٩ = ٧٢ سم²

(٢) مساحة القطاع = س°/٣٦٠ × مساحة الدائرة = ٣٠/٣٦٠ × π (٣,٥)² = ٣ سم²

(٣) مساحة القطاع = ١/٢ θ^ء × نق² = ١/٢ × (١٢٠ × π/١٨٠) × (١٠)² = ١٠٤,٧ سم²

(٤) مساحة القطاع = ١/٢ θ^ء × نق² = ١/٢ × (١,٢^ء) × (١٠)² = ٦٠ سم²

(٥) ل = ٧ ، ∵ محيط القطاع = ل + ٢ نق ∴ ٢٥ = ٧ + ٢ نق ∴ ٢ نق = ١٨

⇐ نق = ٩ سم ، θ^ء = ل/نق = ٧/٩ ^ء

∴ مساحة القطاع = ١/٢ × ٧/٩ × ٨١ = ٣١.٥ سم²

(٦) ∵ ٢٤ = ١٠ + ٢ نق ∴ ٢ نق = ١٤ ⇐ نق = ٧ سم

مساحة الدائرة = π نق² = ٤٩ π = ١٥٤ سم²

(٧) ∵ مساحة القطاع = ١/٢ ل نق ∴ ٢٧٠ = ١/٢ × ل × ١٥

∴ ٥٤٠ = ١٥ ل ⇐ ل = ٣٦ سم ، θ^ء = ل/نق = ٣٦/١٥ = ٢,٤^ء

(٨) ∵ مساحة القطاع = ١/٢ ل نق ∴ ٤٨ = ١/٢ × ٦ × نق ⇐ نق = ١٦ متر

∴ محيط القطاع = ٢ نق + ل = ٢ (١٦) + ٦ = ٣٨ متر

تمارين (١٧)

(١) (أ) ∵ ل = θ^ء × نق ∴ ٥ = θ^ء × ١٠ ⇐ θ^ء = ٠,٥^ء

(ب) مساحة القطعة الدائرية = ١/٢ نق² (θ^ء − جا θ)

(ج) مساحة القطعة الكبرى = مساحة سطح الدائرة − مساحة القطعة الصغرى

(ء) س° = θ^ء × ١٨٠/π ، θ^ء = س° × π/١٨٠

(٢) ١,٤^ء = ١,٤ × ١٨٠/π = ٨٠° ١٣′

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ × (٨)^{٢} [١,٤ – جا ١٣ َ ٨٠ °] = ١٣,٣ سم^{٢}

أو يتم التحويل لنظام الراديان بالضغط على : **SHIFT MODE 4** ثم

مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ × (٨)^{٢} [١,٤ – جا ١,٤ ء] = ١٣,٣ سم^{٢}

ولا تنسى أن تضغط على : **SHIFT MODE 3** للعودة للنظام الستينى .

---

(٣) ١٣٥ ° = ١٣٥ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ٢,٤ ء

∴ مساحة القطعة الدائرية = $\frac{١}{٢}$ × (١٢)^{٢} [٢,٤ ء – جا ١٣٥ °] = ١٢١,٩ سم^{٢}

مساحة الدائرة = π نق^{٢} = ١٤٤ π = ٤٥٢,٤

∴ مساحة القطعة الدائرية الكبرى = ٤٥٢,٤ – ١٢١,٩ = ٣٣٠,٥ سم^{٢}

---

(٤) فى Δ ٯ م جـ : ٯ م = نق = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = ٥ سم

ظا ∠ ٯ م جـ = $\frac{ٯ جـ}{م جـ}$ = $\frac{٤}{٣}$ ∴ ق($\widehat{ٯ م جـ}$) = ٨ َ ٥٣ °

θ = ٢ ق($\widehat{ٯ م جـ}$) = ٢ × ٨ َ ٥٣ ° = ١٦ َ ١٠٦ °

∴ هـ ء = ١٦ َ ١٠٦ ° × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ١.٨٥ ء

∴ مساحة القطعة الدائرية المحددة

= $\frac{١}{٢}$ × (٥)^{٢} [١,٨٥ ء – جا ١٦ َ ١٠٦ °] = ١١ سم^{٢}

---

(٥) ٩٠ ° = ٩٠ × $\frac{\pi}{١٨٠}$ = ١,٦ ء

٥٦ = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} [١,٥٧ ء – جا ٩٠] ∴ ٥٦ = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} [١,٥٧ – ١]

∴ ٥٦ = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} × ٠,٥٧ ⇐ نق^{٢} = ١٩٦ ∴ نق = $\sqrt{١٩٦}$ = ١٤ سم

تمارين (١٨)

(١) (ٯ) مساحة المضلع = $\frac{١}{٤}$ س ل^{٢} ظتا $\frac{\pi}{س}$ سم^{٢}

(ب) مساحة السداسى = $\frac{١}{٤}$ × ٦ × (٢)^{٢} ظتا $\frac{\pi}{٦}$ = ٦ $\sqrt{٣}$ سم^{٢}

(جـ) Δ = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

(ء) قياس زاوية الخماسى المنتظم = $\frac{(٥ - ٢) \times ١٨٠°}{٥}$ = ١٠٨ °

---

(٢) Δ = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٨ × جا ٦٠ = ١٦ $\sqrt{٣}$ = ٢٧,٧ سم^{٢}

---

(٣) Δ = $\frac{١}{٢}$ × ٧ × ٨ × جا ٦٤ = ٢٥,١٦٦ = ٢٥,١٧ سم^{٢}

---

(٤) مساحة الخماسى المنتظم = $\frac{١}{٤}$ × ٥ × (١٠)^{٢} × ظتا $\frac{\pi}{٥}$ = ١٧٢,٠٥ سم^{٢}

---

(٥) مساحة المضلع المنتظم = $\frac{١}{٤}$ × ١٠ × (١٠)^{٢} × ظتا $\frac{\pi}{١٠}$ = ٧٦٩ سم^{٢}

---

(٦) بفرض طول الضلع = س سم ∴ ٣٢ ظتا $\frac{\pi}{٨}$ = $\frac{١}{٤}$ × ٨ × س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{٨}$

∴ س^{٢} = ١٦ ⇐ س = ٤ سم

---

(٧) مساحة الرباعى = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ٨ × جا ٣٠ = ٢٤ سم^{٢}